

Técnicas de Identificación de Sistemas No Lineales Basadas en Lógica Borrosa

Carlos Martínez Belinchón

2 de noviembre de 2004

A María

Índice general

Introducción	XI
1. Herramientas Matemáticas	1
1.1. Introducción a la lógica borrosa	1
1.2. Conjuntos borrosos	4
1.2.1. Funciones de pertenencia	4
1.2.2. Características de los conjuntos borrosos	5
1.2.3. Operaciones entre conjuntos borrosos	7
1.3. Inferencia borrosa	12
1.4. Aplicación al control de sistemas	13
2. Modelado Clásico de Sistemas	21
2.1. Modelado de la maqueta hidráulica	22
2.1.1. Caracterización de la bomba	25
2.1.2. Identificación del depósito	32
2.1.3. Resumen del modelo teórico del depósito	48
2.1.4. Modelo empírico del tanque	48
2.1.5. Simulaciones de los modelos	51
2.2. Modelado de la maqueta térmica	55
2.2.1. Descripción de la maqueta	56
2.2.2. Extracción de un modelo para la maqueta térmica	57
2.2.3. Obtención de un sistema no lineal	74
2.2.4. Implementación de la no linealidad	80
2.2.5. Dinámica del sistema realimentado	83
2.2.6. Simulador de la realimentación	84
2.2.7. Identificación de modelos lineales	88
2.2.8. Modelos en variables de estado	90
2.3. Conclusiones	92
2.3.1. Sistema hidráulico	92
2.3.2. Sistema térmico	92
3. Modelado Borroso del Sistema Térmico	95
3.1. Explicación de la dinámica de los sistemas borrosos	96
3.1.1. Sistema mecánico teórico	96
3.1.2. Modelo lineal	97
3.1.3. Sistema borroso de Takagi-Sugeno	101

3.1.4.	Sistema borroso de Mamdani	102
3.1.5.	Sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia polinómicas de tercer orden	105
3.1.6.	Ejemplo numérico	108
3.2.	Síntesis y análisis dinámico de los modelos	115
3.2.1.	Dinámica lineal	116
3.2.2.	Modelo de <i>Takagi-Sugeno</i>	120
3.2.3.	Modelo borroso de <i>Mamdani</i> con funciones de pertenencia triangulares	123
3.2.4.	Modelo borroso de <i>Mamdani</i> con funciones de pertenencia polinómicas de tercer orden.	126
3.3.	Interpretación gráfica de los resultados	129
3.3.1.	Metodología	129
3.3.2.	Sistema no lineal	130
3.3.3.	Sistemas lineales	132
3.3.4.	Sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia triangulares	135
3.3.5.	Sistema borroso de Mamdani con funciones polinómicas de tercer grado	138
3.3.6.	Sistema borroso de Takagi-Sugeno	141
3.4.	Conclusiones	144
4.	Conclusiones y Propuestas Para Futuros Desarrollos	145
4.1.	Conclusiones	145
4.2.	Propuestas para futuros desarrollos	147
A.	Herramientas y Software Desarrollado	149
A.1.	Herramientas software	149
A.1.1.	Sistemas operativos	149
A.1.2.	Aplicaciones	149
A.1.3.	Lenguajes de programación	150
A.2.	Driver para la tarjeta ADLINK	150
A.2.1.	Descripción	151
A.2.2.	Puesta en funcionamiento	152
A.3.	Driver con realimentación no lineal	155
A.4.	Capturador	156
A.5.	Scripts en Python para <i>Blender 3D</i>	157
A.6.	Licencia	159
B.	Justificación del Método de Derivación	161

Índice de figuras

1.1. Función característica del conjunto P	2
1.2. Función característica del conjunto borroso P	3
1.3. Otra propuesta para $\mu_{\mathcal{P}}(x)$	4
1.4. Ejemplo $\mu_1(x)$	6
1.5. Ejemplo $\mu_2(x)$	6
1.6. Norma mínimo	8
1.7. Producto algebraico	9
1.8. Diferencia acotada	9
1.9. Norma máximo	10
1.10. Suma algebraica	11
1.11. Suma acotada	11
1.12. Esquema de bloques de un controlador borroso	13
1.13. Procedimiento de diseño para el controlador	14
1.14. Descripción borrosa del universo de discurso para el error	16
1.15. Descripción borrosa para el universo de discurso del cambio del error	16
1.16. Consecuencias de las reglas para el controlador Mamdani	16
1.17. Grados de pertenencia del error para la iteración 1	17
1.18. Grados de pertenencia del cambio del error para la iteración 1	17
1.19. Grados de pertenencia del error para la iteración 2	18
1.20. Grados de pertenencia del cambio del error para la iteración 2	18
1.21. Grados de pertenencia del error para la iteración 3	19
1.22. Grados de pertenencia del cambio del error para la iteración 3	19
1.23. Valores de las señales	20
2.1. Fotografía de la maqueta hidráulica	22
2.2. Esquema de la maqueta	23
2.3. Esquema del depósito	23
2.4. Esquema de bloques del sistema	24
2.5. Compensación de la función de transferencia del sensor	24
2.6. Válvula medio abierta	26
2.7. Fallo del circuito hidráulico	26
2.8. Otro fallo en el circuito hidráulico	27
2.9. Respuesta ante distintos escalones de la bomba	28
2.10. Filtrado del ruido de la señal del sensor de caudal	29
2.11. Ajuste de la respuesta ante escalón $5 \rightarrow 8$	29
2.12. Aproximaciones de Padé a la dinámica del sistema	30

2.13. Modelo de segundo orden para el sistema sometido a escalón $5 \rightarrow 8$	31
2.14. Línea de flujo	33
2.15. Familia de soluciones de la ecuación diferencial homogénea	34
2.16. Vaciado del depósito con válvula a 6/6	36
2.17. Vaciado del depósito con válvula a 5/6	36
2.18. Vaciado del depósito con válvula a 4/6	37
2.19. Vaciado del depósito con válvula a 3/6	37
2.20. Vaciado del depósito con válvula a 2/6	38
2.21. Dependencia de la sección de salida con el giro del mando	39
2.22. Representación de $C(a)$	40
2.23. Resultado del ajuste para $C(a)$	40
2.24. Vista de la superficie $\dot{h} = f(h, a)$	41
2.25. Vista lateral de la superficie $\dot{h} = f(h, a)$	42
2.26. Trayectorias del estado para a constante	42
2.27. Relación estática del sensor	44
2.28. Relación entre altura y tensión	47
2.29. Tabla para b	47
2.30. Valores para b	47
2.31. Dinámica del depósito en caída libre	49
2.32. Ecuación diferencial inferida	49
2.33. Vaciado del depósito desde 3 cm	51
2.34. Vaciado del depósito desde 5 cm	51
2.35. Vaciado según la EDO teórica desde 3 cm	52
2.36. Vaciado según la EDO teórica desde 5 cm	52
2.37. Vaciado según la EDO inferida desde 3 cm	53
2.38. Vaciado según la EDO inferida desde 5 cm	53
2.39. Fotografía de la maqueta térmica	56
2.40. Esquema de bloques del sistema térmico	56
2.41. Estática del sistema térmico	57
2.42. Regresión sobre la estática del sistema térmico	58
2.43. Señal respuesta ante escalón de 0 a 2 V filtrada	60
2.44. Señal respuesta ante escalón de 2 a 4 V filtrada	60
2.45. Señal respuesta ante escalón de 4 a 6 V filtrada	61
2.46. Señal respuesta ante escalón de 6 a 8 V filtrada	61
2.47. Señal respuesta ante escalón de 8 a 10 V filtrada	62
2.48. Señal respuesta ante escalón de 0 a 10 V filtrada	62
2.49. Ajuste de la respuesta ante escalón de 0 a 2 voltios del sistema de primer orden	64
2.50. Ajuste de la respuesta ante escalón de 2 a 4 voltios del sistema de primer orden	64
2.51. Ajuste de la respuesta ante escalón de 4 a 6 voltios del sistema de primer orden	65
2.52. Ajuste de la respuesta ante escalón de 6 a 8 voltios del sistema de primer orden	65
2.53. Valores de T para el modelo de primer orden	66
2.54. Valores de k para el modelo de tercer orden	68
2.55. Valores de T_1 para el modelo de tercer orden	69
2.56. Valores de T_2 para el modelo de tercer orden	69
2.57. Valores de T_3 para el modelo de tercer orden	70
2.58. Escalón de 0 a 2 voltios en la entrada del sistema de tercer orden	71
2.59. Escalón de 2 a 4 voltios en la entrada del sistema de tercer orden	71

2.60. Escalón de 4 a 6 voltios en la entrada del sistema de tercer orden	72
2.61. Escalón de 6 a 8 voltios en la entrada del sistema de tercer orden	72
2.62. Escalón de 8 a 10 voltios en la entrada del sistema de tercer orden	73
2.63. Escalón de 0 a 10 voltios en la entrada del sistema de tercer orden	73
2.64. Realimentación no lineal	74
2.65. Constante de tiempo en función de y	76
2.66. Ganancia en función de y	76
2.67. Característica estática del sistema realimentado	79
2.68. Comparación entre las características estáticas de los sistemas	79
2.69. Esquema de bloques para la realimentación	80
2.70. Esquemático del circuito electrónico	81
2.71. Nuevo esquema de bloques para la realimentación	82
2.72. Modificación del circuito electrónico	82
2.73. Dinámica del sistema realimentado ante escalón de 0 a 10 voltios	83
2.74. Dinámica del sistema realimentado ante escalón de 10 a 0 voltios	84
2.75. Dinámica del sistema realimentado ante escalón de 0 a 1 voltios	85
2.76. Dinámica del sistema realimentado ante escalón de 9 a 10 voltios	85
2.77. Comparación de las características estáticas y dinámicas de los modelos	86
2.78. Comparación de la respuesta ante escalón $0 \Rightarrow 10$	86
2.79. Comparación de la respuesta ante escalón $0 \Rightarrow 1$	87
2.80. Comparación de la respuesta ante escalón $9 \Rightarrow 10$	87
2.81. Identificación lineal entorno a $r = 0$	88
2.82. Identificación lineal entorno a $r = 10$	89
3.1. Sistema mecánico teórico	96
3.2. Representación de la EDO en el plano de fases	97
3.3. Sistema linealizado, ante escalón positivo	98
3.4. Sistema linealizado, ante escalón negativo	99
3.5. Tiempo entre x_1 y x_2	99
3.6. Diferencia entre el tiempo en llegar de los dos sistemas	100
3.7. Comparación de la rapidez de los sistemas	100
3.8. Funciones características triangulares para los conjuntos borrosos.	101
3.9. Aproximación a la dinámica del sistema borroso de Takagi-Sugeno.	102
3.10. Formulación de las reglas del sistema borroso de Mamdani.	103
3.11. Funciones características de los conjuntos borrosos triangulares	103
3.12. Aproximación de la dinámica por el sistema borroso de Mamdani	103
3.13. Estimación del adelanto del sistema borroso de Mamdani	104
3.14. Comparación de la dinámica ante escalón negativo	104
3.15. Funciones de pertenencia polinómicas cúbicas	106
3.16. Aproximación a la dinámica no lineal del sistema borroso de Mamdani con polinómicas	107
3.17. Comparación entre la dinámica de los sistemas	109
3.18. Familia de soluciones	110
3.19. Dinámica del sistema lineal	111
3.20. Sistema linealizado frente al no lineal	111
3.21. Dinámica del sistema Takagi-Sugeno	112
3.22. Sistema de Takagi-Sugeno frente al no lineal	112

3.23. Dinámica del sistema borroso de Mamdani	113
3.24. Sistema linealizado frente al no lineal	113
3.25. Dinámica del sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia po- linómicas	114
3.26. Sistema borroso frente al no lineal	114
3.27. Escalón $u = 0 \rightarrow 1$ para el modelo lineal en $u = 0$	117
3.28. Escalón $u = 0 \rightarrow 10$ para el modelo lineal en $u = 0$	118
3.29. Escalón $u = 10 \rightarrow 9$ para el modelo lineal en $u = 10$	119
3.30. Escalón $u = 10 \rightarrow 0$ para el modelo lineal en $u = 10$	119
3.31. Escalón $u = 0 \rightarrow 1$ para <i>Takagi-Sugeno</i>	121
3.32. Escalón $u = 0 \rightarrow 10$ para <i>Takagi-Sugeno</i>	121
3.33. Escalón $u = 10 \rightarrow 9$ para <i>Takagi-Sugeno</i>	122
3.34. Escalón $u = 10 \rightarrow 0$ para <i>Takagi-Sugeno</i>	122
3.35. Escalón $u = 0 \rightarrow 1$ para Mamdani triangulares	124
3.36. Escalón $u = 0 \rightarrow 10$ para Mamdani triangulares	124
3.37. Escalón $u = 10 \rightarrow 9$ para Mamdani triangulares	125
3.38. Escalón $u = 10 \rightarrow 0$ para Mamdani triangulares	125
3.39. Escalón $u = 0 \rightarrow 1$ para Mamdani tercer orden	127
3.40. Escalón $u = 0 \rightarrow 10$ para Mamdani tercer orden	127
3.41. Escalón $u = 10 \rightarrow 9$ para Mamdani tercer orden	128
3.42. Escalón $u = 10 \rightarrow 0$ para Mamdani tercer orden	128
3.43. Ejemplo de empleo de <i>Blender 3D</i> para representar superficies	129
3.44. Superficie del sistema no lineal	130
3.45. Dependencia con la derivada del estado	131
3.46. Superficies de los sistemas lineales	132
3.47. Dependencia con la derivada del estado de los sistemas lineales	133
3.48. Tangencia a la superficie no lineal	134
3.49. Superficie del sistema borroso de Mamdani	135
3.50. No dependencia de la derivada del estado	136
3.51. Aproximación al no lineal del MA1	137
3.52. Superficie del sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia po- linómicas	138
3.53. Aproximación al no lineal del MA3	139
3.54. No dependencia de la derivada del estado	140
3.55. Superficie del sistema borroso de Takagi-Sugeno	141
3.56. Dependencia de la derivada del estado	142
3.57. Aproximación al sistema no lineal del TS	143
A.1. Captura de pantalla del driver	154
A.2. Esquema del controlador 8319drv	155
A.3. Esquema del controlador 8319drv-sq	155
A.4. Captura de pantalla del capturador de señales	156
A.5. Captura de pantalla de blender	158
B.1. Sucesión de funciones $\delta_n(t)$	162
B.2. Sucesión de funciones $\delta'_n(t)$	164

Índice de cuadros

1.1. Matriz de inferencia	15
2.1. Tabla de la característica estática	25
2.2. Valores observados para $C(a)$	39
2.3. Puntos de control para el ajuste del polinomio	40
2.4. Resultados de la estática del sensor de altura	43
2.5. Parámetros de centralización y dispersión	44
2.6. Tabla de observaciones en los experimentos para b (medidas en voltios)	46
2.7. Tabla de la estática de la maqueta térmica	57
2.8. Estimaciones para T en primer orden	63
2.9. Tabla de las estimaciones para los parámetros del sistema de tercer orden	68

Introducción

Este proyecto presenta algunos métodos basados en lógica borrosa para identificar sistemas no lineales así como su aplicación a maquetas de sistemas físicos.

El objetivo del proyecto es poner en aplicación algunos resultados básicos de la teoría de sistemas lineales, sistemas borrosos y no lineales en general a través de los sistemas físicos reales que se encuentran disponibles en los laboratorios del DISAM. La mayor parte del esfuerzo se ha invertido en el trabajo de identificación consistente en confeccionar distintas clases de modelos de los sistemas, pero se presentan también algunos resultados referentes al análisis dinámico comparativo de aquellos modelos.

En el capítulo 1 se hace una introducción a la lógica borrosa y se presentan algunos resultados básicos que se han empleado durante el proyecto. Se ha dedicado una sección a las aplicaciones de la lógica borrosa y a la presentación de los dos tipos clásicos de modelos borrosos. Se cierra el capítulo con una aplicación al control de sistemas.

El capítulo 2 contiene los trabajos de identificación de los modelos matemáticos para los sistemas físicos con los que más tarde se llevarán a cabo el modelado borroso y el análisis dinámico. Allí donde existe conocimiento teórico sobre las ecuaciones diferenciales del proceso esta información es usada y se intenta contrastar con otras técnicas que no presuponen conocimiento de las leyes que rigen el proceso.

En el capítulo 3 se muestran los resultados de aplicar los métodos de confección de modelos borrosos presentados en el capítulo 1 a las maquetas cuyos modelos se extrajeron en el capítulo 2 y se realiza un análisis dinámico comparando las respuestas del sistema físico con aquellas de los sistemas borrosos confeccionados. Se comienza ilustrando todos estos conceptos de manera teórica al análisis dinámico de un sistema mecánico no lineal de primer orden y se pasa más tarde a su aplicación a las maquetas.

Acompañan a la memoria una serie de apéndices donde se recogen justificaciones sobre los resultados matemáticos usados durante los capítulos y la documentación del software desarrollado específicamente para el proyecto.

La presente memoria del proyecto recoge los trabajos desarrollados desde junio de 2002 hasta junio de 2004 en la División de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales (DISAM). Durante el último de ellos se obtuvo una beca de Colaboración con los Departamentos de la UPM concedida por el Ministerio de Educación y Ciencia.

Capítulo 1

Herramientas Matemáticas

Este capítulo contiene una introducción a la lógica borrosa, se presentan los dos tipos de sistemas borrosos clásicos y se muestran algunas aplicaciones al control de sistemas.

1.1. Introducción a la lógica borrosa

Los modelos matemáticos empleados en ciencias puras, ingeniería o economía tratan de racionalizar en términos matemáticos un planteamiento que se hace a menudo en términos naturales, lingüísticos. Un primer problema que aparece al plantear los modelos es que algunos de los conceptos que entran en juego pueden ser de naturaleza ambigua o vaga, como por ejemplo el que en una habitación haga frío o el que una persona pueda ser considerada como alto o bajo de estatura. Un segundo problema puede ser la imposibilidad de establecer una escala para medir una variable, como por ejemplo, la dulzura de un alimento. Finalmente puede aparecer como tercer problema la imposibilidad de obtener medida alguna sobre las variables del proceso, como puede ser el caso por ejemplo la concentración en silicio en el centro de un cubilete de fundición o la homogeneidad de una mezcla en un punto dado de un reactor químico.

Para la matemática clásica la representación de los datos sobre las magnitudes a las que pertenecen se realiza mediante la especificación de conjuntos que llamaremos *nítidos* para distinguirlos de los conjuntos borrosos que se presentan más tarde.

Un *conjunto nítido* se caracteriza completamente mediante la especificación de sus elementos. Existen varias maneras de caracterizar un conjunto nítido y la primera de ellas es mediante una enumeración de sus elementos, como por ejemplo, la enumeración de las letras del alfabeto.

$$\mathcal{M} = \{x_1, \dots, x_n\} \quad (1.1)$$

Cuando los elementos de un conjunto son infinitos no es posible una descripción como la anterior y entonces se prefiere dar una relación que cumplen los elementos que pertenecen al conjunto como por ejemplo los números que pueden expresarse como suma de cuadrados,

$$\mathcal{M} = \left\{ c \in \mathcal{N} / \exists a, b \in \mathcal{N} \text{ con } c = a^2 + b^2 \right\} \quad (1.2)$$

Sin embargo la manera preferida de describir un conjunto nítido es mediante una *función característica* que tome por dominio una clase X más general, que contenga al conjunto M y

que dicha función tome el valor 1 sobre el elemento x cuando pertenezca a M , valiendo 0 de otro modo.

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{X} &\longrightarrow I = \{0, 1\} \\ x &\mapsto m(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Téngase por ejemplo el conjunto de las notas que garantizan el aprobado en un examen. La primera forma de definir el conjunto según 1.1 sería la siguiente:

$$\mathcal{P} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (1.4)$$

La segunda forma de especificar el conjunto sería la siguiente:

$$\mathcal{P} = \{n \in \mathcal{N} / n \geq 5\} \quad (1.5)$$

La tercera forma sería según 1.3 la mostrada en la figura 1.1

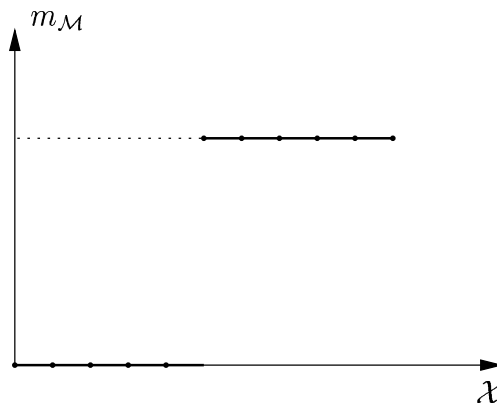


Figura 1.1: Función característica del conjunto \mathcal{P}

Esta tercera forma será la preferida más adelante para generalizar estas ideas a los conjuntos borrosos.

El problema de la descripción nítida de conjuntos es que la especificación matemática clásica que debe darse para los elementos del conjunto no es compatible con las transiciones graduales desde la pertenencia a la no pertenencia o viceversa que son naturales en el planteamiento del problema. De hecho, esta transición tiene que eliminarse para poder describir los elementos como pertenecientes a un conjunto o a otro y el problema no es tanto la posición de la “frontera” que delimita la pertenencia a los conjuntos quizá *sino más bien el salto en sí*.

Para ilustrarlo inténtese interpretar el conjunto anterior \mathcal{P} ya no como las notas que garantizan el aprobado, sino como las notas que indican que el alumno tiene un conocimiento *adecuado* de la asignatura. Según la primera interpretación de \mathcal{P} , como el conjunto de notas que dan el aprobado en un examen ocurre que un alumno que puntuase 5,0 está aprobado, mientras que otro alumno que obtuviese 4,98 suspende el examen y debe presentarse en la siguiente convocatoria. Esto mismo no parece razonable en la segunda interpretación del

conjunto P como aquellas notas que indican que el alumno tiene un conocimiento adecuado de la asignatura: no se entiende que el primer alumno sea considerado del mismo modo que otro alumno que obtuviese una nota de 2, cuando sus conocimientos sobre la asignatura son mucho más parecidos a los de su compañero que obtuvo 5,0. Hay que observar que este problema es, como antes se dijo, independiente de la puntuación para la cual se decida dar el aprobado; el problema está en que el paso brusco de la pertenencia entre conjuntos no refleja a veces la forma en la que se plantea el problema.

La pregunta que aparece entonces es, ¿qué hay en el planteamiento de un problema que dificulte por lo arriba dicho su planteamiento en términos de conjuntos nítidos de la matemática clásica? Una primera característica puede ser el empleo de términos lingüísticos, por su naturaleza imprecisa, como por ejemplo “los hombres altos pasen por esta ventanilla”, “quiero un coche que consuma poca gasolina” o “mantenga una distancia de seguridad suficiente con el coche que le precede”. En estos ejemplos existe una métrica en la que evaluar la característica de los elementos, pero lo que no está claro es cómo clasificar a un hombre como “alto”, qué es “poca gasolina” o qué distancias son o no “suficientes” (¿qué es un conocimiento “adecuado”?). La ambigüedad puede eliminarse mediante el planteamiento nítido del problema, que sería “los hombres que midan más de 1,85 centímetros por favor pasen por esta ventanilla”, o “quiero un coche que consuma menos de 3,82 litros de gasolina a los 100 kilómetros”, o “mantenga una distancia mayor o igual a 50 metros y 320 milímetros con su coche precedente”, pero a cambio como puede observarse de que el problema se plantee en términos absurdos. Otras posibilidades es que no exista una forma de medir las magnitudes sobre las que se trabaja o bien que no haya datos disponibles en absoluto.

La solución a los problemas antes citados pasa por utilizar una lógica de predicados multivaluada (en lugar de la clásica bi-valuada) para describir los conjuntos descritos por proposiciones imprecisas e interpretar. La manera usual de describir el *conjunto borroso* M es mediante una *función característica* análoga a la presentada anteriormente en la expresión 1.3,

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{X} &\longrightarrow I = [0, 1] \\ x &\mapsto \mu_{\mathcal{M}}(x) \end{aligned} \tag{1.6}$$

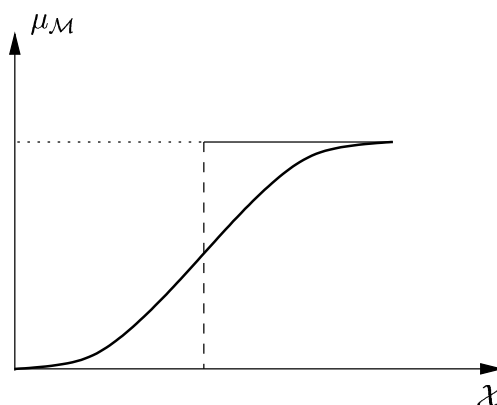


Figura 1.2: Función característica del conjunto borroso P

La forma de la función característica puede variar de una interpretación a otra según la

opinión de quien decida. Así un profesor puede pensar que sus exámenes reflejan fielmente el conocimiento del alumno y describiría las notas que indican un “conocimiento adecuado” como se indica en la figura 1.3

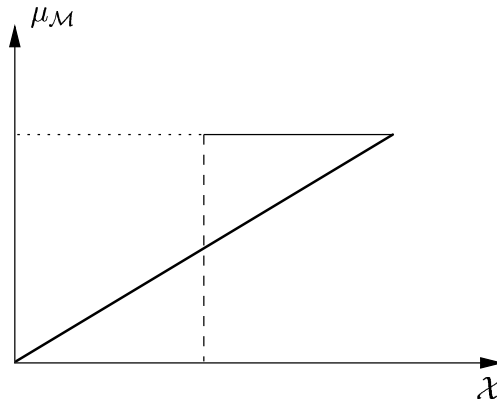


Figura 1.3: Otra propuesta para $\mu_P(x)$

Esta libertad a la hora de establecer la forma de las funciones de pertenencia a los conjuntos borrosos es útil para poder reflejar el concepto intuitivo que acompaña a la descripción del problema.

Además de servir para representar las ideas o conceptos vagos o ambiguos que aparecen en la descripción de un problema, puede que los datos disponibles sean en sí borrosos, como por ejemplo los niveles de gris en una imagen que se quiere segmentar y de la que sólo interesa la presencia o no de un objeto.

Otra posibilidad es que el problema necesite una descripción muy compleja en la forma usual, pero que admite un planteamiento sencillo en términos cualitativos. También puede carecer de sentido dar una solución precisa a un problema de tipo sociológico o que tenga que ver con la economía por ejemplo, y que se plantee de modo muy sencillo en términos cualitativos.

Como conclusión podemos decir que existe un compromiso entre, por un lado la complejidad de los procesos y por otro lado la posibilidad de tratar numéricamente el problema por métodos tradicionales y que la lógica borrosa proporciona una posibilidad nueva para realizar el planteamiento de los problemas.

1.2. Conjuntos borrosos

Sigue a continuación una presentación sintética de la teoría de conjuntos borrosos de la que se ha hecho uso en el proyecto.

1.2.1. Funciones de pertenencia

Se define un conjunto borroso A sobre el universo de discurso X a través de su *función de pertenencia* $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$. También se puede decir que A es un subconjunto borroso sobre X .

Los conjuntos nítidos son casos particulares de los conjuntos borrosos en los que la función característica toma únicamente valores 0 o 1.

Las funciones características pueden darse de varias maneras:

- Mediante la expresión simbólica de la función, por ejemplo $\mu_A(x) = \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$
- En universos de discurso discretos especificando los pares (miembro, grado de pertenencia) mediante una tabla como la mostrada en 1.7 por ejemplo.

$$B \begin{cases} x_i : & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ \mu_B(x_i) : & 0 & 0,3 & 0,5 & 0,5 & 0,3 & 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Dos conjuntos borrosos A y B son *iguales* si tienen la misma función de pertenencia.

$$A = B \longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (1.8)$$

El conjunto borroso *vacío* tiene la siguiente función de pertenencia

$$\mu_\emptyset(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (1.9)$$

El conjunto borroso *universal* sobre X se define mediante

$$\mu_{\mathcal{X}}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (1.10)$$

La libertad a la hora de elegir la forma de las funciones de pertenencia permite utilizar criterios adicionales e incorporar así información subjetiva a la descripción. Por ejemplo, téngase el conjunto borroso F de las temperaturas “agradables” sobre el universo de discurso T de las temperaturas. Si encontramos a dos personas que entienden que de haber una temperatura ideal esta sería 25 grados centígrados, sus descripciones borrosas del conjunto de temperaturas agradables podrían ser en el primer caso la mostrada en la expresión 1.11.

$$\mu_1(x) = \left[1 - \frac{|x - 25|}{2}\right]^+ = \begin{cases} 0 & x < 23 \\ \frac{x-23}{2} & 23 \leq x \leq 25 \\ \frac{27-x}{2} & 25 \leq x \leq 27 \\ 0 & x > 27 \end{cases} \quad (1.11)$$

La segunda persona podría haber dado la descripción del conjunto según la expresión 1.12

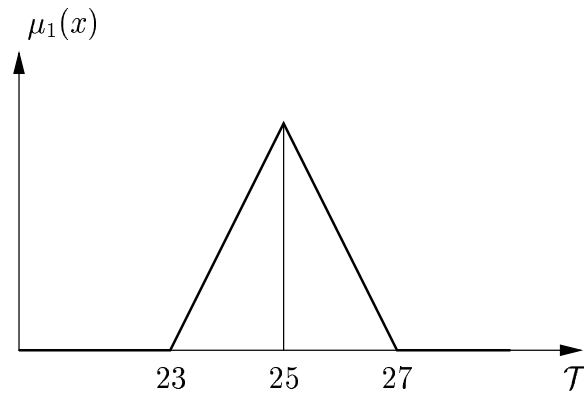
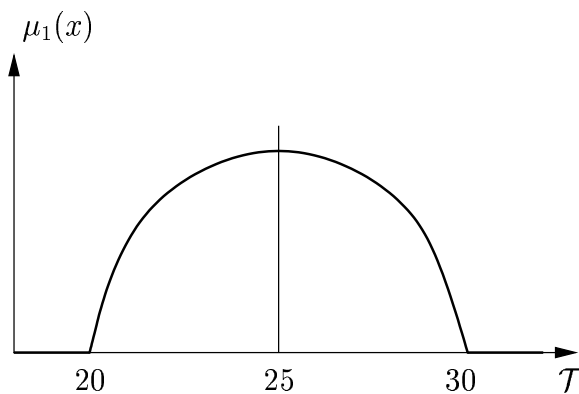
$$\mu_2(x) = \left[1 - \frac{(x - 25)^2}{25}\right]^+ = \begin{cases} 0 & x < 20 \\ 1 - \frac{(x-25)^2}{25} & 20 \leq x \leq 30 \\ 0 & x > 30 \end{cases} \quad (1.12)$$

1.2.2. Características de los conjuntos borrosos

Se emplean algunas características de los conjuntos borrosos para compararlos entre sí o para caracterizarlos parcialmente. A continuación se presentan algunos de estos parámetros:

- Se define el *soporte* del conjunto borroso A como

$$\text{sop}(A) = \{x \in \mathcal{X} / \mu_A(x) > 0\} \quad (1.13)$$

Figura 1.4: Ejemplo $\mu_1(x)$ Figura 1.5: Ejemplo $\mu_2(x)$

- Se define la altura del conjunto borroso A como

$$\text{alt}(A) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mu_A(x) \quad (1.14)$$

Los conjuntos borrosos de altura unidad se denominan *normales*. Aquellos conjuntos borrosos que no cumplen lo anterior se pueden normalizar mediante la transformación de su función característica dada por la ecuación 1.15.

$$\mu_{A^n}(x) = \frac{\mu_A(x)}{\text{alt}(A)} \quad (1.15)$$

El único conjunto que tiene altura 0 es el conjunto borroso vacío \emptyset y además tiene soporte vacío. Si el valor de la altura de A se alcanza para algún x de \mathcal{X} y sólo en ese x entonces se dice que el conjunto borroso A es *unimodal*.

- Así como la cardinalidad de un conjunto clásico indica el número de elementos que contiene, se puede definir de manera análoga la *cardinalidad de un conjunto borroso* bien como en la expresión 1.16

$$\text{card}(A) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu_A(x) \quad (1.16)$$

si el soporte del conjunto borroso A es discreto, o bien según 1.17 si el soporte es continuo.

$$\text{card}(A) = \int_{\mathcal{X}} \mu_A(x) dx \quad (1.17)$$

1.2.3. Operaciones entre conjuntos borrosos

Los conjuntos borrosos pueden operarse entre sí de forma análoga a los conjuntos clásicos y al ser los primeros una generalización de los segundos debe ocurrir que las definiciones de las operaciones de intersección, unión y complemento se correspondan con las clásicas cuando se apliquen a conjuntos nítidos. El resultado de operar dos conjuntos borrosos será otro conjunto borroso caracterizado por una función de pertenencia obtenida a partir de la de los operandos.

En general las definiciones de los operadores son bastante arbitrarias, existiendo la costumbre de definir el operador *intersección* mediante cualquier aplicación *t-norma* y el operador *unión* mediante cualquier aplicación *s-norma*. A continuación se presentan las propiedades de las t-normas y s-normas y se indican las más empleadas para actuar como operadores entre conjuntos borrosos.

t-normas

Una t-norma o norma triangular es una aplicación

$$t : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (1.18)$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. Es no decreciente en cada argumento

$$x \leq y, w \leq z \longrightarrow t(x, y) \leq t(w, z) \quad (1.19)$$

2. Conmutatividad

$$t(x, y) = t(y, x) \quad \forall x, y \in [0, 1] \quad (1.20)$$

3. Asociatividad

$$t(t(x, y), z) = t(x, t(y, z)) \quad \forall x, y, z \in [0, 1] \quad (1.21)$$

4. Se satisfacen condiciones de contorno

$$t(x, 0) = 0, \quad t(x, 1) = x \quad \forall x \in [0, 1] \quad (1.22)$$

Se utilizan para expresar la intersección de dos conjuntos borrosos,

$$\mu_{A \cap B}(x) = t(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (1.23)$$

Las siguientes son las normas triangulares más usadas,

- Norma mínimo (figura 1.6)

$$t(x, y) = \min(x, y) \quad (1.24)$$

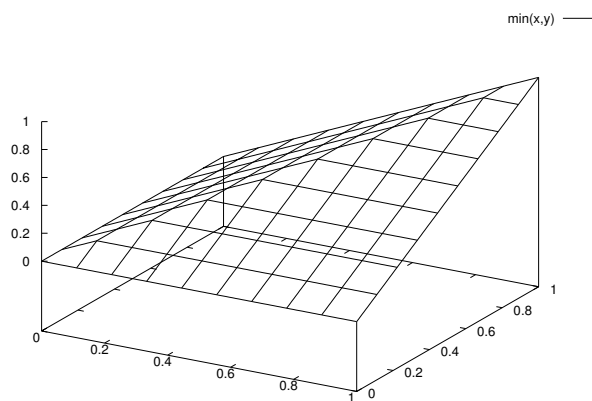


Figura 1.6: Norma mínimo

- Producto algebraico (figura 1.7)

$$t(x, y) = x * y \quad (1.25)$$

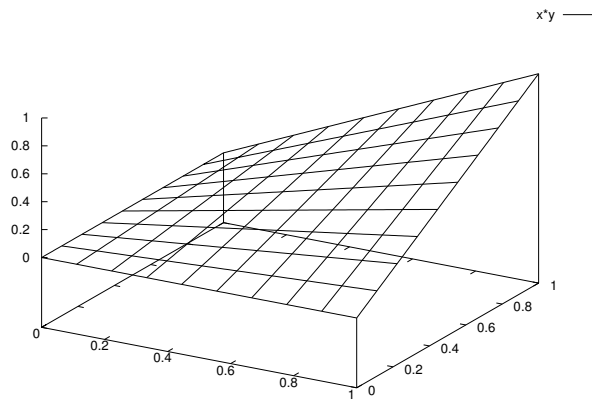


Figura 1.7: Producto algebraico

- Diferencia acotada (figura 1.8)

$$t(x, y) = \text{máx}(0, x + y - 1) \quad (1.26)$$

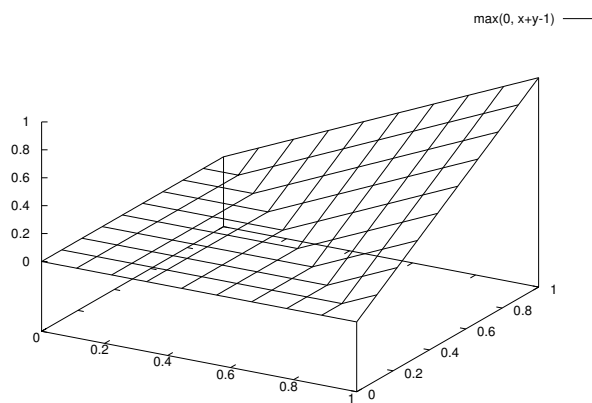


Figura 1.8: Diferencia acotada

s-normas

Una s-norma o conorma triangular es una aplicación

$$s : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (1.27)$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. Es no decreciente en cada argumento

$$x \leq y, w \leq z \longrightarrow s(x, y) \leq s(w, z) \quad (1.28)$$

2. Conmutatividad

$$s(x, y) = s(y, x) \quad \forall x, y \in [0, 1] \quad (1.29)$$

3. Asociatividad

$$s(s(x, y), z) = s(x, s(y, z)) \quad \forall x, y, z \in [0, 1] \quad (1.30)$$

4. Se satisfacen condiciones de contorno

$$s(x, 0) = x, \quad s(x, 1) = 1 \quad \forall x \in [0, 1] \quad (1.31)$$

Se utilizan para expresar la unión de dos conjuntos borrosos,

$$\mu_{A \cup B}(x) = s(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (1.32)$$

Algunos ejemplos de estas conormas triangulares son las siguientes

- Norma máximo (figura 1.9)

$$s(x, y) = \max(x, y) \quad (1.33)$$

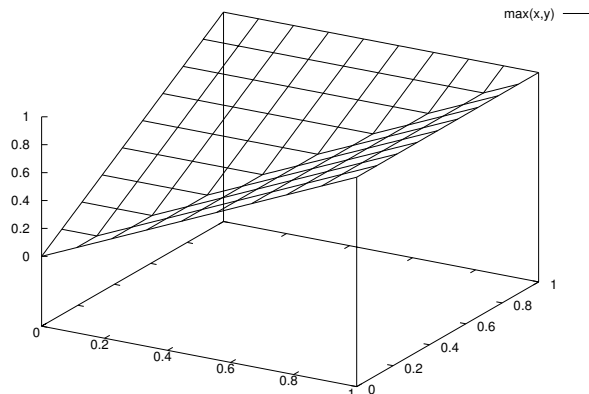


Figura 1.9: Norma máximo

- Suma algebraica (1.10)

$$s(x, y) = x + y - xy \quad (1.34)$$

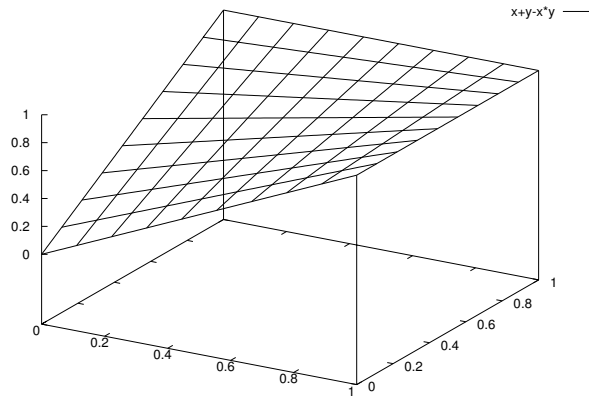


Figura 1.10: Suma algebraica

- Suma acotada (figura 1.11)

$$s(x, y) = \min(1, x + y) \quad (1.35)$$

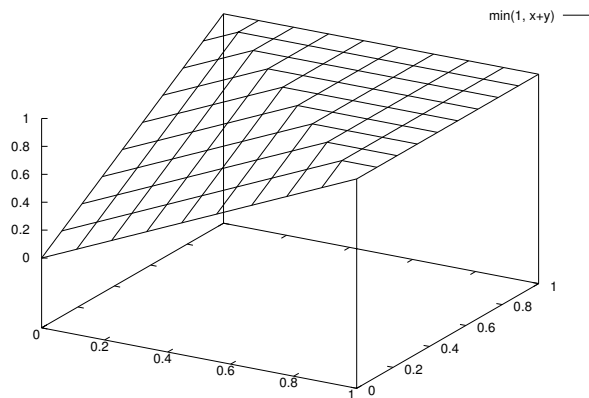


Figura 1.11: Suma acotada

1.3. Inferencia borrosa

Al igual que existen diferentes maneras de definir las operaciones *and* y *or* entre conjuntos borrosos, existen también multitud de maneras de definir la operación “implicación”. La mayoría de ellas se basan en t-normas y s-normas. A continuación se presentan las dos formas más populares del operador “implicación borrosa”:

$$\begin{array}{ll} \text{Mamdani} & \mu(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ \text{Larsen} & \mu(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \end{array}$$

En lógica borrosa los razonamientos son aproximados y de naturaleza imprecisa. La idea principal es que el consecuente de una regla borrosa será tanto más cierto cuanto mayor sea el grado de cumplimiento de los antecedentes.

Los esquemas de razonamiento borroso son extensiones de los clásicos “modus ponens” y “modus tollens”.

Modus ponens

La forma del razonamiento según la estructura “modus ponens” es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Antecedente 1: Premisa de la regla} & \text{“}x \text{ es } A' \text{”} \\ \text{Antecedente 2: Regla} & \text{“si } x \text{ es } A \text{ entonces } y \text{ es } B \text{”} \\ \hline \text{Consecuente} & \text{“}y \text{ es } B' \text{”} \end{array}$$

La operación de composición proporciona la función de pertenencia del conjunto borroso del consecuente B' en función de los conjuntos borrosos de la premisa A' y de la implicación F . La forma propuesta por Zadeh es:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{A'.F}(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} [\min(\mu_{A'}(x), \mu_F(x, y))] \quad (1.36)$$

Modus tollens

La forma del razonamiento según la estructura “modus tollens” es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Antecedente 1: Premisa de la regla} & \text{“}y \text{ es } B' \text{”} \\ \text{Antecedente 2: Regla} & \text{“si } x \text{ es } A \text{ entonces } y \text{ es } B \text{”} \\ \hline \text{Consecuente} & \text{“}x \text{ es } A' \text{”} \end{array}$$

Este esquema se reduce al anterior si $A' = \bar{A}$ y $B' = \bar{B}$.

1.4. Aplicación al control de sistemas

La lógica borrosa tiene una aplicación práctica muy extendida al mundo del control de sistemas. La estructura clásica para los *controladores borrosos* suele ser la mostrada en la figura 1.12.

Consta de las siguientes partes:

Borrosificación : en este bloque se calculan los grados de pertenencia a cada uno de los conjuntos borrosos que describen el universo de cada una de las variables de entrada al bloque. A la salida del bloque se tienen tantos vectores de grados de pertenencia como variables entren al borrosificador y cada uno de ellos con tantas componentes como conjuntos borrosos existan en la descripción para las variables. En un ejemplo sencillo como el representado en la figura 1.12 las variables que se borrosifican son *el error* y *el cambio del error* (la derivada del error).

Reglas : suele ser una base de datos donde se recogen las políticas de control en forma de conocimiento “experto” en forma de reglas lingüísticas. Estas reglas pueden obtenerse de varios modo: a partir de un modelo borroso del sistema, basadas en la experiencia de un operario experto o mediante el cálculo de controladores lineales locales.

Inferencia : teniendo en cuenta los grados de pertenencia de cada variable de entrada a sus conjuntos borrosos se dice que *se disparan reglas* y se calculan las consecuencias de la inferencia como se vio en la sección 1.3.

Desborrosificación : convierte la acción “borrosa” de control que se ha inferido en una acción concreta para aplicarla al proceso. Se suele también realizar un escalado para adecuar el rango de la variable de salida al rango de los actuadores. El método más utilizado es el *método del centro de gravedad* ya que proporciona variaciones suaves y continuas de la señal de control. Se calcula como el centro de gravedad del conjunto borroso obtenido al hacer la inferencia.

$$o_{df} = \frac{\int_{\mathcal{X}} x \mu(x) dx}{\int_{\mathcal{X}} \mu(x) dx} \quad (1.37)$$

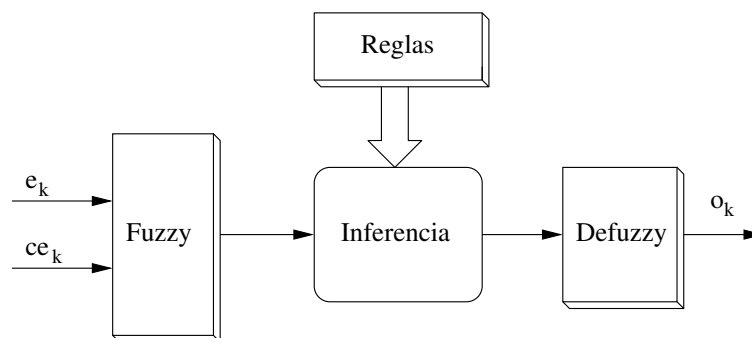


Figura 1.12: Esquema de bloques de un controlador borroso

Existen dos tipos clásicos de sistemas borrosos que son empleados como reguladores en lazos de control:

Controlador borroso de Mamdani : los consecuentes de las reglas son conjuntos borrosos.

Controlador borroso de Takagi-Sugeno : los consecuentes de las reglas son sistemas lineales dados por su ecuación diferencial.

A continuación se presenta un ejemplo de síntesis de un controlador borroso de tipo Mamdani que emula un controlador proporcional derivativo con saturación.

Controlador borroso PD de Mamdani

El siguiente controlador se sintetizó para el depósito del sistema hidráulico que más tarde se presenta en el capítulo 2.1 de la memoria. Solo es necesario entender por ahora que la acción de control es no negativa y que se aplica a una bomba que no conducirá nunca caudales negativos, que el depósito tiene de manera natural a vaciarse.

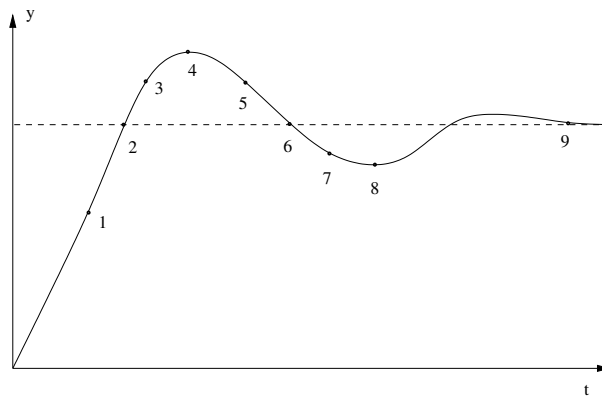


Figura 1.13: Procedimiento de diseño para el controlador

Punto 1 : el error es positivo y la derivada del error es negativa. La acción de control a tomar será *muy positiva* ya que aún no hemos llegado al error nulo aunque se está avanzando en la dirección correcta.

Punto 2 : el error es nulo pero la derivada del error es negativa. La acción de control a tomar será *nula*, ya que se sabe que el sistema tiende a caer hacia el valor nulo de la variable de salida y la variable de salida aún está subiendo.

Punto 3 : el error es negativo y la derivada del error es negativa. La acción a tomar es *nula* ya que la variable está sobreoscilando y es necesario frenarla.

Punto 4 : el error es negativo y la derivada nula. La acción de control debe ser *nula* para que la variable de salida caiga ligeramente hasta el valor deseado (error nulo).

Punto 5 : el error es negativo y la derivada positiva. Se dejará que la variable controlada caiga libremente hasta el régimen permanente, así que daremos una señal *nula* de control al accionador.

Punto 6 : el error es nulo y la derivada del error es *positiva*. Se debe actuar con una señal muy positiva para frenar la caída de la variable de salida ya que ya se ha pasado la oportunidad de alcanzar el régimen permanente y habrá que volver a hacer subir a la señal de salida.

Punto 7 : el error es positivo y la derivada del error es positiva. La acción a tomar sobre el actuador debe ser *muy muy positiva* ya que se está lejos del permanente y además la tendencia es a alejarse más.

Punto 8 : el error es positivo y la derivada del error es nula. La señal de control debe ser *muy positiva* ya que de otro modo el sistema se quedaría en un régimen permanente erróneo.

Punto 9 : el error es nulo y la derivada del error es nula, con lo que la acción de control debe ser *positiva* para evitar que la variable controlada caiga.

Las anteriores reglas pueden resumirse en forma de matriz como se muestra en la tabla 1.1. Se leerían como por ejemplo

Si E es Z Y CE es Z entonces O es P

E/CE	N	Z	P
N	Z	Z	Z
Z	Z	P	VP
P	P	VP	VVP

Cuadro 1.1: Matriz de inferencia

Para aclarar todos los conceptos hasta aquí presentados vamos a aplicar el controlador que se ha diseñado en esta sección a un sistema discreto lineal y se darán tres pasos en su resolución.

El sistema discreto viene dado por la ecuación en diferencias 1.38 con tiempo de muestreo $T = 1$ segundo.

$$y_k = 0,6y_{k-1} + 0,2o_k \quad (1.38)$$

La referencia al controlador será $y_{ref} = 8$.

Las figuras 1.14 y 1.15 muestran la descripción borrosa de los universos de discurso para las variables de entrada al regulador.

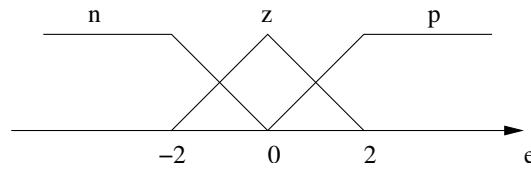


Figura 1.14: Descripción borrosa del universo de discurso para el error

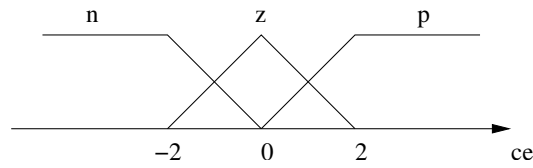


Figura 1.15: Descripción borrosa para el universo de discurso del cambio del error

Las consecuencias de las reglas en el controlador de Mamdani se muestran en la figura 1.16.

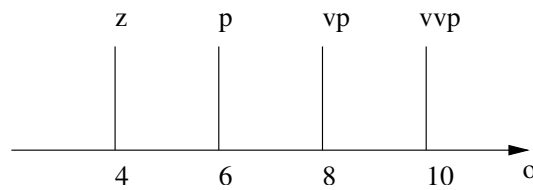


Figura 1.16: Consecuencias de las reglas para el controlador Mamdani

Primera iteración . Tenemos $y_0 = 0$ así que $e_1 = 8$ y $ce_1 = 8/1 = 8$. La borrosificación del error y del cambio del error proporcionan los siguientes vectores de grados de pertenencia (ver figuras 1.17 y 1.18):

$$\mu_1^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_1^{ce} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

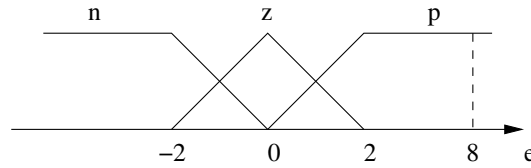


Figura 1.17: Grados de pertenencia del error para la iteración 1

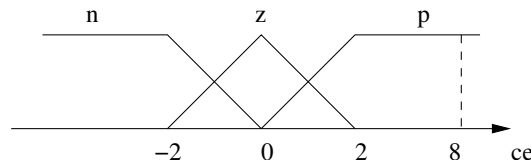


Figura 1.18: Grados de pertenencia del cambio del error para la iteración 1

Construimos la matriz de pesos para las reglas mediante el producto

$$\bar{w} = \mu^e \cdot (\mu^{ce})^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Se puede ver que se dispara únicamente la regla

Si E es P y CE es P ENTONCES O es VVP

La desborrosificación resulta ser

$$o_1 = \frac{\sum w_i o_i}{\sum w_i} = \frac{(1 \cdot 1) \cdot 10}{1} = 10 \quad (1.41)$$

El sistema responde con

$$y_1 = 0,6y_0 + 0,2o_1 = 0,2 \cdot 10 = 2 \quad (1.42)$$

Segunda iteración . Tenemos $y_1 = 2$ así que $e_2 = 6$ y $ce_2 = \frac{6-8}{1} = -2$. La borrosificación del error y del cambio del error proporcionan los siguientes vectores de grados de pertenencia (ver figuras 1.19 y 1.20):

$$\mu_2^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_2^{ce} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

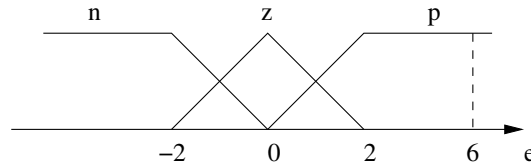


Figura 1.19: Grados de pertenencia del error para la iteración 2

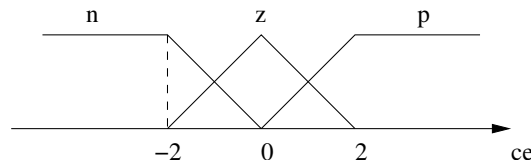


Figura 1.20: Grados de pertenencia del cambio del error para la iteración 2

Construimos la matriz de pesos para las reglas mediante el producto

$$\bar{w} = \mu^e \cdot (\mu^{ce})^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Sólo se activa la regla

Si E es P y CE es N ENTONCES O es P

La desborrosificación es ahora

$$o_2 = \frac{\sum w_i o_i}{\sum w_i} = \frac{(1 \cdot 1) \cdot 6}{1} = 6 \quad (1.45)$$

El sistema responde con

$$y_2 = 0,6y_1 + 0,2o_2 = 0,6 \cdot 2 + 0,2 \cdot 6 = 2,4 \quad (1.46)$$

Tercera iteración . Tenemos $y_2 = 2,4$ así que $e_3 = 8 - 2,4 = 5,6$ y $ce_3 = \frac{5,6-6}{1} = -0,4$. La borrosificación del error y del cambio del error proporcionan los siguientes vectores de grados de pertenencia (ver figuras 1.21 y 1.22):

$$\mu_3^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_3^{ce} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

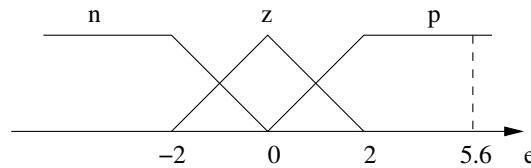


Figura 1.21: Grados de pertenencia del error para la iteración 3

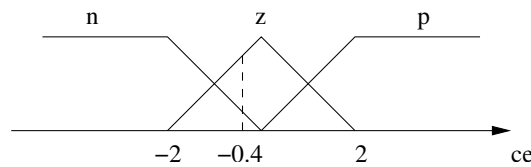


Figura 1.22: Grados de pertenencia del cambio del error para la iteración 3

Construimos la matriz de pesos para las reglas mediante el producto

$$\bar{w} = \mu^e \cdot (\mu^{ce})^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Esta vez se activan las reglas

SI $e=p$ Y $ce=n$ ENTONCES $o=p$ SI $e=p$ Y $ce=z$ ENTONCES $o=vp$

La desborrosificación es ahora

$$o_3 = \frac{\sum w_i o_i}{\sum w_i} = \frac{(0,2 \cdot 6 + 0,8 \cdot 8) \cdot 6}{0,2 + 0,8} = 7,6 \quad (1.49)$$

El sistema responde con

$$y_3 = 0,6y_2 + 0,2o_3 = 0,6 \cdot 2,4 + 0,2 \cdot 7,6 = 2,96 \quad (1.50)$$

Los valores de las señales que se han calculado se representan en la gráfica 1.23.

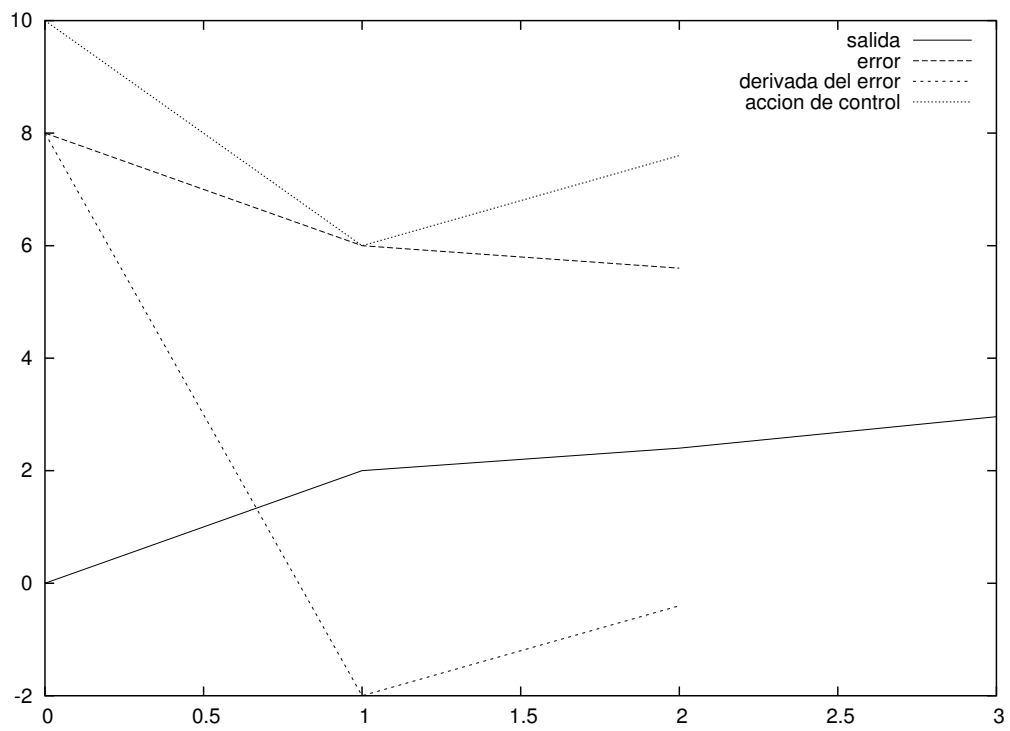


Figura 1.23: Valores de las señales

Capítulo 2

Modelado Clásico de Sistemas

Para estudiar y aplicar las técnicas de síntesis de modelos borrosos que son objetivo de este proyecto es necesario contar con sistemas físicos sobre los que experimentar.

En primer lugar y antes de confeccionar los modelos borrosos para los sistemas se decidió extraer toda la información posible de los sistemas elegidos en forma de modelos matemáticos.

Durante este capítulo se presentan los resultados de aplicar técnicas clásicas de identificación de sistemas a las maquetas elegidas para experimentar. Estas maquetas son dos sistemas físicos que se encuentran disponibles en uno de los laboratorios del DISAM. Se trata en primer lugar de una maqueta que contiene un pequeño circuito hidráulico mientras que la segunda es un sistema térmico.

El objetivo del capítulo es pues estudiar si los sistemas elegidos son adecuados para realizar sobre ellos el trabajo de confección de modelos borrosos.

2.1. Modelado de la maqueta hidráulica

La maqueta objeto del estudio es un sistema hidráulico a pequeña escala construido por la empresa alemana *Elwe*. Presenta un panel frontal (figura 2.1) en el que pueden verse las siguientes partes:

Bornes para intercambiar señales eléctricas

- Bornes de alimentación de la maqueta de -15,0, y 15 voltios.
- Una entrada a la maqueta notada como y de valores entre 0 y 10 voltios. Esta tensión es aplicada a la bomba para que mueva el fluido hacia el depósito.
- Una salida de la maqueta notada como X_r tras un sensor que convierte caudal en tensión (q/u). Sus valores van también desde 0 a 10 voltios.
- Otra salida de la maqueta notada como X_r tras un sensor que convierte altura en tensiones en el rango normalizado 0/10 voltios.

Mandos manuales

- Un potenciómetro que controla un amplificador en cascada con la entrada y para modular la amplitud de la señal que llega a la bomba.
- Un mando para cerrar o abrir la válvula que se encuentra a la salida del depósito.

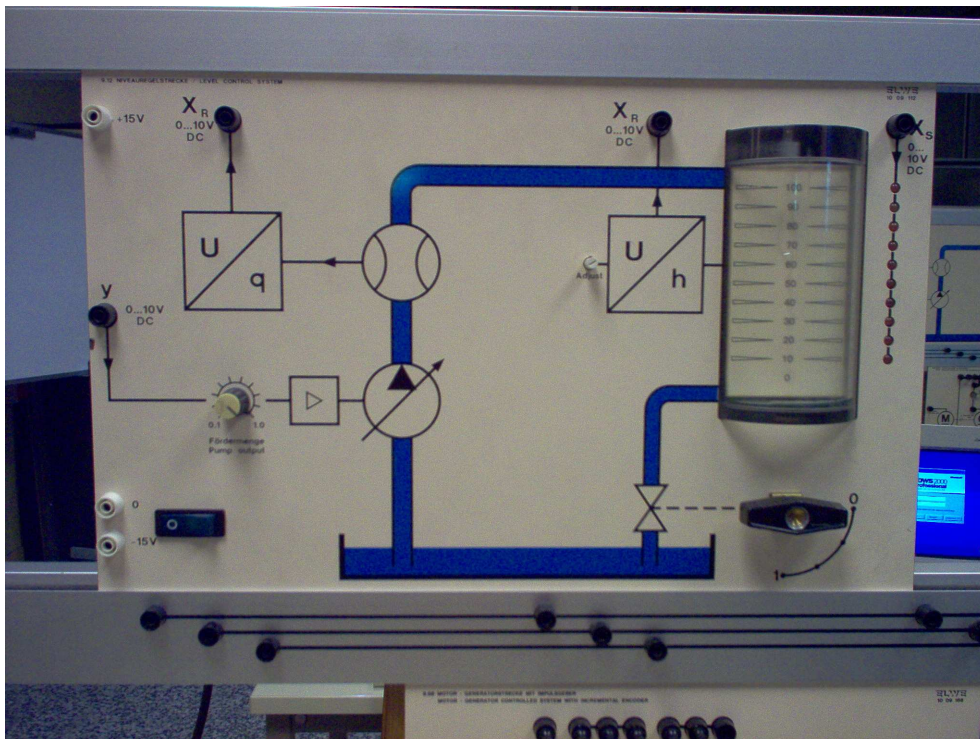


Figura 2.1: Fotografía de la maqueta hidráulica

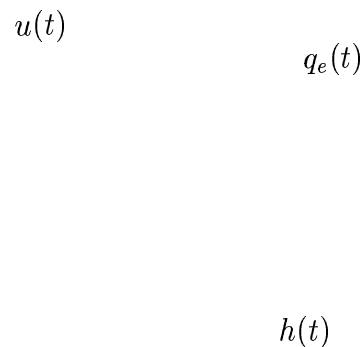


Figura 2.2: Esquema de la maqueta

La figura 2.2 muestra el esquema de la maqueta en términos de señales, actuadores y sensores en terminología ISA.

El depósito puede detallarse más aún, pues tiene una válvula cuya apertura puede accionarse (figura 2.3).

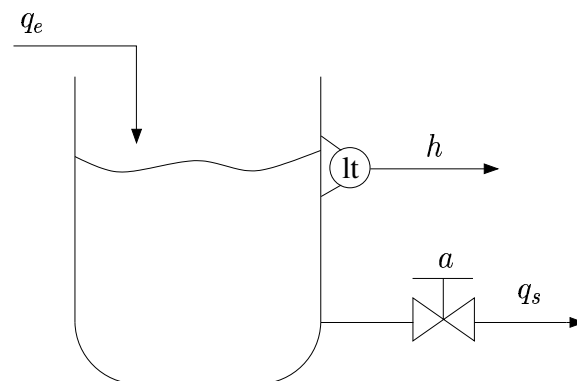


Figura 2.3: Esquema del depósito

Cara a la identificación del sistema y eventualmente al control de sus variables, interesa especificar las fronteras de cada sistema y las señales que intercambian entre ellos. En la figura 2.4 se observa la separación de la maqueta en los siguientes subsistemas:

Bomba : tiene por entrada u tensión aplicada a la bomba y por salida q_e caudal de entrada al depósito.

Sensor de caudal : tiene por entrada q_e y proporciona una señal eléctrica v_{q_e} .

Depósito : tiene por entradas el caudal de entrada q_e y la apertura de la válvula a y por salida h .

Sensor de altura : tiene por entrada la altura h del depósito y por salida una señal eléctrica v_h .

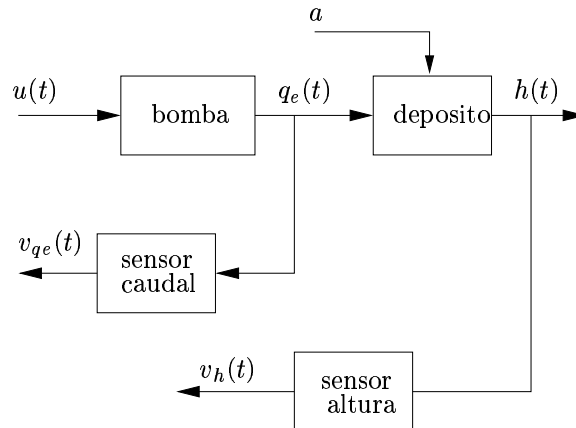


Figura 2.4: Esquema de bloques del sistema

La estructura que se muestra en la figura 2.4 hace imposible el poder realizar la identificación de la bomba si no es incluyendo en el sistema al sensor de caudal. así que hay que tener en cuenta que los experimentos que se hagan a partir de este momento lograrán la identificación del conjunto “bomba+sensor”. Esto no es mayor problema a nivel global ya que el modelo del depósito que podremos dar tendrá como entrada *no el caudal de fluido que entra al tanque sino su valor sentido* y en el sistema formado por la composición en cascada del modelo de la bomba junto con el del depósito se compensará el modelo del sensor (ver figura 2.5). Por simplicidad se va a suponer que el sensor no va a influir en la dinámica del conjunto, esto es, que se tomará su señal q_e en voltios como proporcional al caudal que mide.

Ocurrirá un problema similar al tratar de identificar el depósito ya que se tiene conocimiento de la altura necesariamente a través del sensor de altura. En este caso será posible calibrar el sensor de altura y proporcionar una relación entre la tensión medida y la altura del líquido en el tanque¹.

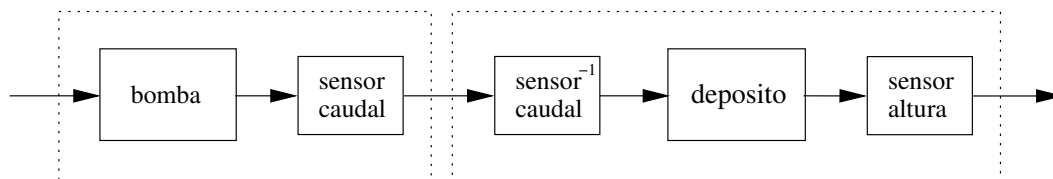


Figura 2.5: Compensación de la función de transferencia del sensor

Otro punto a resaltar de la maqueta es que podemos actuar sobre el sistema “bomba” a través de la señal de entrada u a la maqueta, pero desgraciadamente no ocurre lo mismo con una de las variables de entrada al depósito: el caudal q_e que se vierte al tanque. Ocurre entonces que no es posible conocer cómo influye el caudal de entrada en la dinámica del depósito mediante el método usual consistente en identificar la respuesta ante escalón ya que no es posible conseguir un escalón de caudal q_e a la entrada del depósito.

Vamos a dividir el trabajo de modelado de la maqueta en el modelado de la bomba por un parte y el modelado del depósito por otra.

¹ver la sección 2.1.2 dedicada a la calibración del sensor en este capítulo.

2.1.1. Caracterización de la bomba

El modelado de la bomba es sencillo ya que se trata de un sistema monovariable sobre cuya entrada u tenemos control y cuya salida q_e podemos medir a través del caudalímetro.

Los aspectos a estimar en el sistema “bomba” son:

- En primer lugar la característica estática del sistema, esto es, la relación entre la variable de entrada y la variable de salida del sistema en situaciones de régimen permanente.
- En segundo lugar un modelo dinámico para la bomba, a poder ser lineal.

Característica estática

El procedimiento experimental que se siguió para estudiar la característica estática es el siguiente: se lleva la entrada a una tensión u concreta, se espera a que el caudal evolucione hasta alcanzar el régimen permanente y se toma la medición de q_e .

La tabla 2.1 muestra los valores recogidos siguiendo este método al hacer dos series de mediciones.

$u_\infty(V)$	$q_{e_\infty}^{(1)}(V)$	$q_{e_\infty}^{(2)}(V)$
0.0	0.00	0.00
4.5	1.82	2.42
5.0	2.53	3.10
5.5	3.29	3.78
6.0	3.82	4.36
6.5	4.72	5.04
7.0	5.30	5.71
7.5	5.81	6.24
8.0	6.35	6.72
8.5	6.92	7.27
9.0	7.53	7.70
9.5	7.97	8.50
10.0	8.52	9.07

Cuadro 2.1: Tabla de la característica estática

Llevando las parejas de puntos (u, q_e) a unos ejes cartesianos se construye una gráfica como la mostrada en la figura 2.6.

Se aprecia a simple vista un gran problema en la relación estática entre la tensión u y el caudal q_e , y es que *la bomba no mueve caudal alguno cuando la tensión aplicada a su entrada es menor que una cierta tensión que ronda los 4 voltios y que varía ligeramente entre experimentos*. Estamos ante un sistema que tiene una zona muerta importante.

Pero el mayor problema con diferencia que aparece al trabajar con la bomba es que si se deja evolucionar al caudal hasta alcanzar el régimen permanente cuando se la somete a tensiones superiores a 8 voltios ocurre que la altura de equilibrio en el depósito es tal que se llega a vaciar el depósito intermedio del que la bomba toma el fluido. Se alcanza entonces el punto en que la bomba comienza a introducir aire en el circuito hidráulico junto con el líquido y esto distorsiona las medidas del caudalímetro (ver figura 2.7).

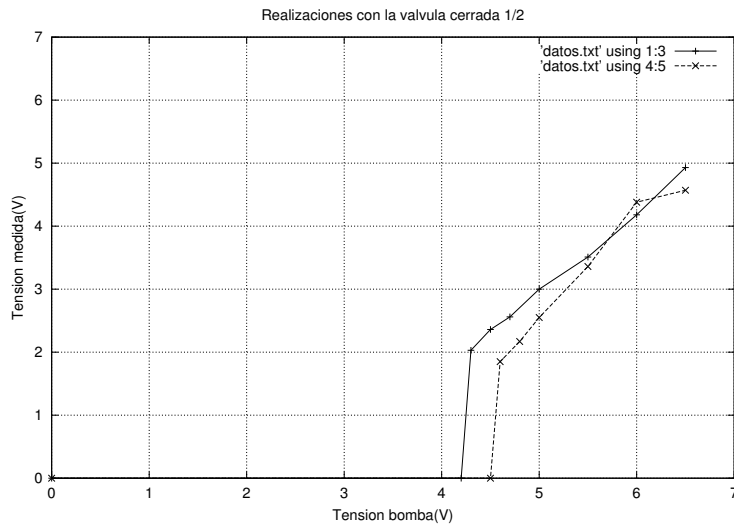


Figura 2.6: Válvula medio abierta

Se puede entender además que la tensión que provoca este fenómeno *depende de la apertura de la válvula*, ya que si se encuentra entornada entonces el nivel de equilibrio del líquido en el tanque será mayor para la misma tensión en la entrada y el fenómeno indeseado se dará antes.

En las figuras 2.7 y 2.8 se observa la evolución en el tiempo de la señal eléctrica que proporciona el sensor de caudal. Se aprecia en las figuras que al llegar a una altura en el tanque cercana a 55 milímetros la bomba comienza a introducir aire en el circuito y el sensor comienza a dar señales erróneas.

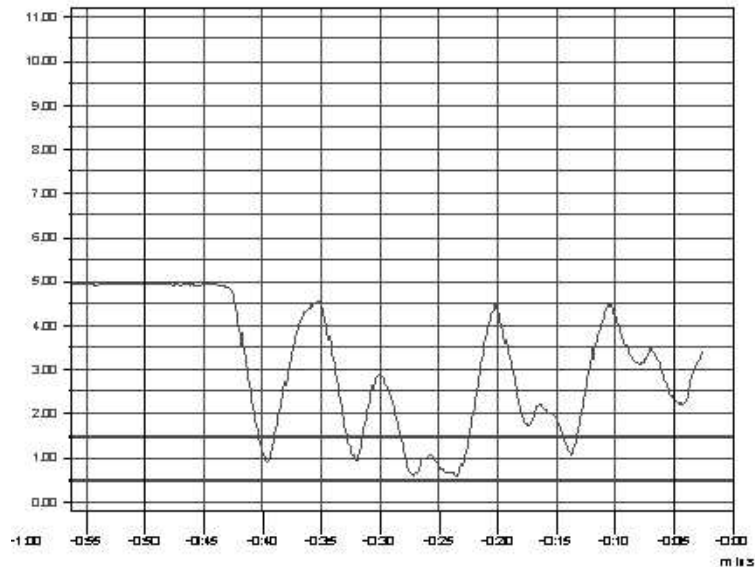


Figura 2.7: Fallo del circuito hidráulico

Como solución a este problema se puede evitar que aparezca este fenómeno al modelar la

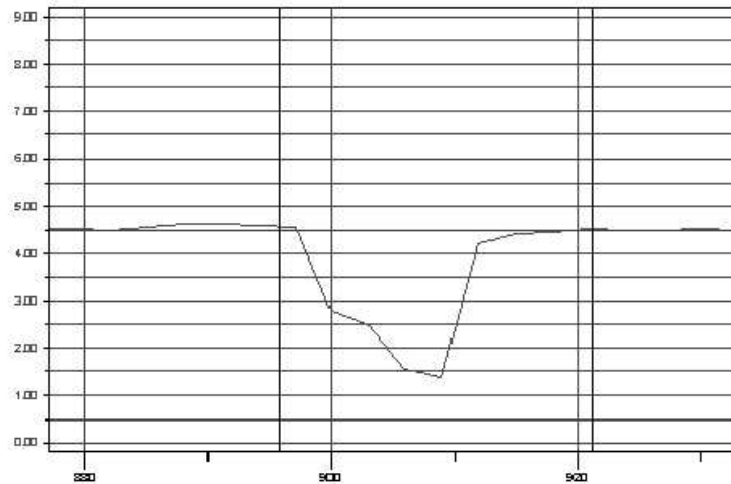


Figura 2.8: Otro fallo en el circuito hidráulico

bomba si se toman las medidas de caudal antes de que el depósito llegue a la altura a la que se produce el fenómeno. Esto nos permite dar un modelo de la bomba independiente de las variables que se encuentran en las partes siguientes del circuito hidráulico.

Se va a intentar ahora dar una expresión matemática para la relación que se observa entre u y q_e (en régimen permanente) en la figura 2.6 de la forma que se muestra en la ecuación 2.1.

$$q_e = \begin{cases} 0 & 0 \leq u < 4,5 \\ a + b \cdot u & 4,5 \leq u \leq 10 \end{cases} \quad (2.1)$$

Tras realizar una regresión de los datos de la tabla 2.1 y alguna repetición más de los experimentos encontramos la expresión 2.2 como la que mejor explica las observaciones.

$$q_e = \begin{cases} 0 & 0 \leq u < 4,5 \\ 1,2257u - 2,9306 & 4,5 \leq u \leq 10 \end{cases} \quad (2.2)$$

Modelo para la dinámica de la bomba

En este apartado se trata de encontrar un sistema dinámico del menor orden posible que aproxime las respuestas ante escalón de la bomba.

La figura 2.9 muestra las respuestas del caudal de la bomba ante escalones de amplitud 1, 2, 3, 4 y 5 en su entrada partiendo de un valor de 5 voltios.

Notar que el tiempo muerto que aparece en la gráfica es menor de 1 segundo, pero es muy importante comparado con el tiempo característico de la respuesta no retardada. Este comportamiento es no lineal y además *no es linealizable*. Aún así todas las respuestas tienen aproximadamente el mismo tiempo muerto y esto facilitará la síntesis un modelo que represente la dinámica del sistema en general.

Notar también que las respuestas ante escalones altos son ligeramente sobreoscilatorias mientras que las respuestas ante escalones de menor magnitud son sobreamortiguadas. Pro-

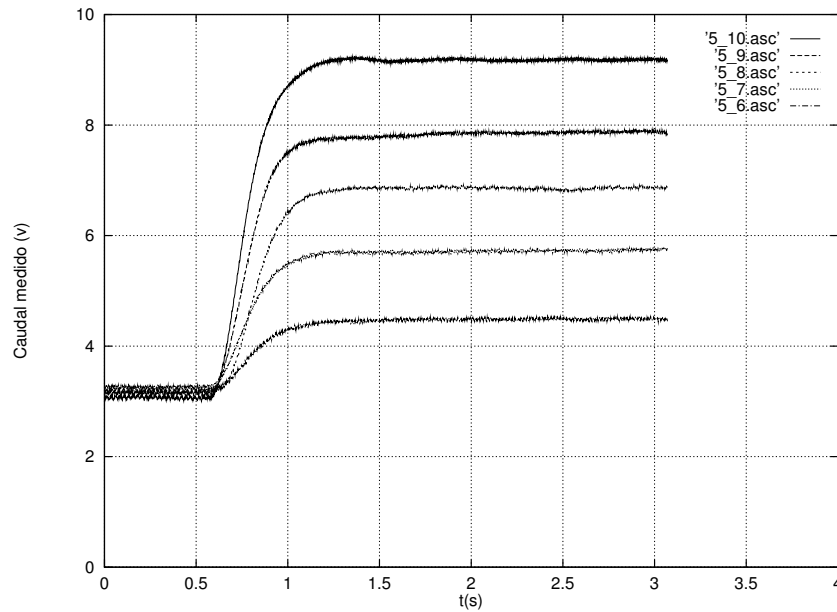


Figura 2.9: Respuesta ante distintos escalones de la bomba

blemente en algún punto intermedio se da el caso de respuesta críticamente amortiguada con polos reales múltiples. De todos modos las cinco respuestas tienen aproximadamente la misma dinámica y esto también facilitará poder dar un único modelo para el sistema.

Antes de acometer los procesos de identificación conviene filtrar la señal adquirida. Para ello se ha programado un filtro digital de primer orden programado *ad-hoc* en C (su código se adjunta a la memoria en el cdrom). Eligiendo la frecuencia de corte adecuadamente puede conseguirse eliminar gran parte del ruido sin modificar el contenido en frecuencia de la señal original (ver figura 2.10).

Los métodos numéricos de ajuste se alimentan con las señales filtradas. Para estimar el juego de parámetros de los sistemas lineales que hace mínima la diferencia en cuadrados entre la señal observada y la señal explicada se ha programado una aplicación en el lenguaje de programación C, aunque se recomienda usar el comando *fit* de *Gnuplot* por ser mucho más eficiente y agradable.

Los modelos que se han extraído de las respuestas mostradas en la figura 2.10 han sido un modelo de primer orden con retardo, un intento de linealizar este último mediante aproximaciones de Padé y finalmente un modelo de segundo orden sin retardo.

Ajuste a primer orden con retardo . Un primer intento sería ajustar la dinámica de la bomba a la de un sistema de primer orden con retardo del tipo

$$T\dot{q}_e(t) + q_e(t) = ku(t - t_m) \quad (2.3)$$

Donde se usará la ganancia $k = 1,2257$ constante que fue calculada en el apartado dedicado al estudio de la característica estática.

Mediante el empleo de la orden *fit* para *Gnuplot* se realizaron los ajustes de modelos de primer orden con retardo como el mostrado en la ecuación 2.3 para cada una de las

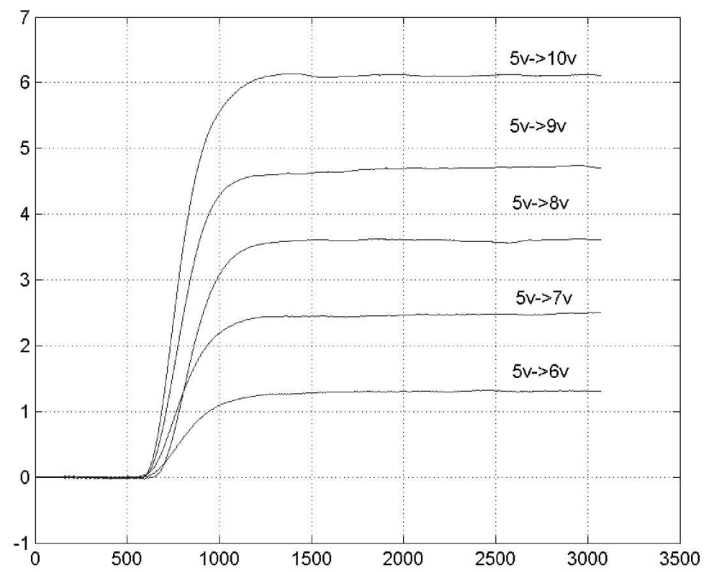
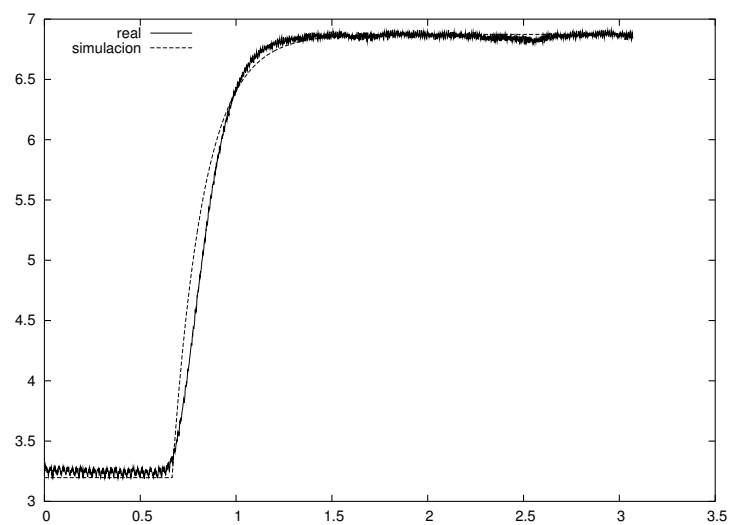


Figura 2.10: Filtrado del ruido de la señal del sensor de caudal

cinco señales y se tomaron las medias de los valores para el tiempo característico T y el tiempo muerto t_m

En la figura 2.11 puede observarse el ajuste del modelo anterior en el caso de la respuesta de la bomba ante escalón 5 \rightarrow 8.

Figura 2.11: Ajuste de la respuesta ante escalón 5 \rightarrow 8

Los resultados son los siguientes:

$$T = 0,31004 \quad (2.4)$$

$$t_m = 0,66629 \quad (2.5)$$

Aproximaciones de Padé al modelo anterior . El modelo anterior es bastante fiel a la respuesta real pero tiene el inconveniente de ser no lineal por tener incorporado un tiempo muerto. Además el tiempo muerto es *aproximadamente el doble* del tiempo característico del sistema, de modo que no es posible despreciarlo.

Es sabido que la transformada de Laplace de una señal retardada t_m es la transformada de la señal no retardada multiplicada por una exponencial compleja.

$$\mathcal{L}\{f(t - t_m)\} = \int_0^\infty f(t - t_m)e^{-ts} dt \quad (2.6)$$

Con el cambio de variable $u = t - t_m$, y si $f(t)$ se considera nula para $t < 0$ tenemos

$$\mathcal{L}\{f(t - t_m)\} = \int_0^\infty f(u)e^{-(u+t_m)s} du = e^{-t_ms} \int_0^\infty f(u)e^{-us} du = \mathcal{L}\{f(t)\} e^{-t_ms} \quad (2.7)$$

Las aproximaciones de Padé para un sistema dinámico con retardo se basan en desarrollar por Taylor el término exponencial que aparece en la función de transferencia. La ecuación 2.8 muestra cómo se opera para obtener la primera aproximación de Padé para el término de retardo.

$$e^{-t_ms} = \frac{e^{-\frac{t_m}{2}s}}{e^{\frac{t_m}{2}s}} \approx \frac{1 - \frac{t_m}{2}s}{1 + \frac{t_m}{2}s} \quad (2.8)$$

En la figura 2.12 se muestran las aproximaciones de Padé de primer, segundo y tercer orden a la dinámica del sistema de la figura 2.11.

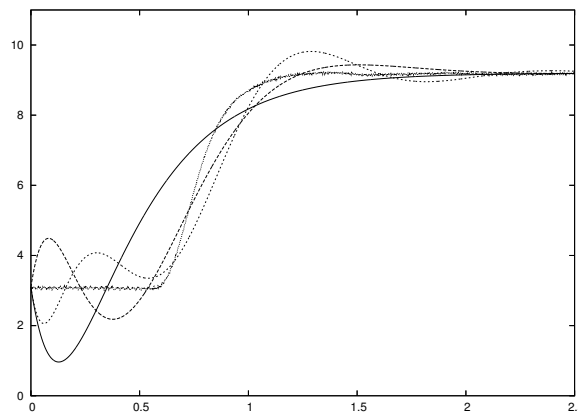


Figura 2.12: Aproximaciones de Padé a la dinámica del sistema

Como se puede apreciar ninguna de las aproximaciones es aceptable como modelo del sistema real.

Ajuste a segundo orden . Se intenta por último ajustar la dinámica de la respuesta del sistema mostrada en la figura 2.11 a la de un cierto sistema de segundo orden lineal sin retardo.

El resultado se muestra en la figura 2.13

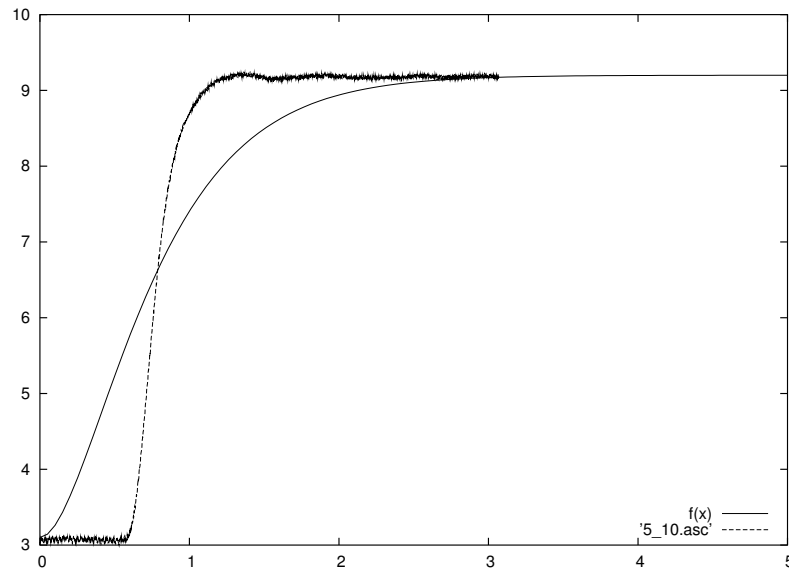


Figura 2.13: Modelo de segundo orden para el sistema sometido a escalón $5 \rightarrow 8$

Como puede observarse la aproximación es de nuevo inaceptable de nuevo debido quizá al gran tiempo muerto que presenta el sistema físico.

2.1.2. Identificación del depósito

El objetivo de esta sección es conseguir un modelo en ecuaciones diferenciales que ajuste la dinámica del subsistema “depósito” dentro de la maqueta hidráulica. Es de esperar que la dinámica encontrada sea no lineal ya que existen modelos teóricos dados por la Mecánica de Fluidos que así lo indican.

Uno de los principales problemas que se encuentran al intentar modelar el depósito como sistema dinámico en representación externa es que existen dos entradas al sistema, como se mencionó en la sección 2.1.

Caudal de entrada al depósito del que conocemos únicamente su medida a través del sensor de caudal calibrado en la sección 2.1.1. El mayor problema que se presenta es la dificultad en encontrar la forma en la que el *caudal de entrada* afecta a la dinámica del sistema y es que *no existe forma de dar escalones en el caudal de entrada*. Esto se debe a que el caudal es la salida de otro sistema dinámico cuya entrada sí que podemos controlar. De este modo *no es posible* utilizar escalones en la entrada q_e para identificar su influencia en la dinámica del sistema. Como se muestra más adelante, la estrategia para superar este problema es utilizar el conocimiento teórico sobre la forma en la que el caudal de entrada afecta a la dinámica con un sencillo balance de masas al sistema “depósito”.

Apertura de la válvula para la que la maqueta no facilita escala de medida ni señal alguna con su valor. El problema aquí es que se desconoce tanto la sección eficaz de la válvula como la dependencia de la sección de salida para el líquido con el giro del mando de la válvula. El diseño sugiere que se trate esta entrada como una perturbación al sistema, pero aún así se hará un esfuerzo importante por intentar explicar la influencia de la apertura de la válvula en la dinámica del depósito.

Ecuación diferencial del flujo ideal

Consideraciones de naturaleza matemática pueden conducirnos a la estructura de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica de la altura en el tanque en función de la apertura de la válvula y del caudal de entrada al depósito.

En el desarrollo matemático que sigue se considera flujo ideal en la salida de fluido del depósito a través de un orificio en su fondo. La ecuación de Bernoulli (2.9) es una integral primera de las leyes de conservación de la cantidad de movimiento para una partícula fluida cuando esta se integra a lo largo de una línea de flujo.

$$\left[U + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right]_1 = 0 \quad (2.9)$$

Aplicado a una línea de flujo como la indicada en la figura 2.14,

$$gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \quad (2.10)$$

Teniendo en cuenta que la presión es la misma en ambos puntos, que la diferencia de alturas es h y que la velocidad de la partícula fluida es inicialmente nula se llega a la expresión 2.11.

$$gh = \frac{v_2^2}{2} \quad (2.11)$$

Esto es en resumen

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (2.12)$$

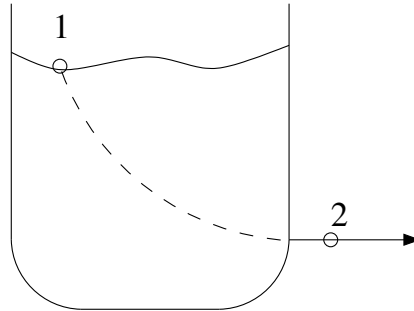


Figura 2.14: Línea de flujo

La ecuación diferencial para la altura en función del caudal de entrada se obtiene mediante un balance de masas sencillo para el sistema abierto “depósito”,

$$dm = \rho \cdot q_e \cdot dt - \rho \cdot q_s \cdot dt \quad (2.13)$$

$$\rho \cdot dV = \rho(q_e - q_s)dt \quad (2.14)$$

$$dV = (q_e - q_s)dt \quad (2.15)$$

$$A_d \cdot dh = (q_e - q_s)dt \quad (2.16)$$

$$dh = \frac{q_e - q_s}{A_d} dt \quad (2.17)$$

$$\dot{h} = \frac{q_e - q_s}{A_d} \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

Teniendo en cuenta que

$$q_s = S \cdot v_s = S \cdot \sqrt{2gh} \quad (2.20)$$

podemos asegurar que se cumple la siguiente expresión²:

$$\dot{h} = \frac{q_e - S \cdot \sqrt{2gh}}{A_d} \quad (2.21)$$

Donde la notación que se indica es la que sigue

h : altura del depósito (m)

A_d : área del depósito (m^2)

g : gravedad ($m \cdot s^{-2}$)

S : sección efectiva de salida para el fluido (m^2)

q_e : caudal de entrada al depósito (m^3/s)

²Se observa que la dinámica no depende de la densidad del fluido.

Solución analítica de la ecuación diferencial homogénea

Es posible resolver analíticamente la ecuación diferencial planteada en 2.21 considerando que el caudal de entrada es nulo:

$$\dot{h} + \left[\frac{S}{A_d} \cdot \sqrt{2g} \right] h^{1/2} = 0 \quad (2.22)$$

La ecuación diferencial 2.22 es la versión homogénea de la ecuación 2.21 y su solución se encuentra según el siguiente procedimiento:

$$\left[\frac{A_d}{S\sqrt{2g}} \right] \frac{dh}{h^{1/2}} = -dt \quad (2.23)$$

$$\left[\frac{A_d}{S\sqrt{2g}} \right] \left[\frac{h^{1/2}}{1/2} \right]_{h_1}^{h_2} = -t \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{A_d}{S} \sqrt{\frac{2}{g}} \right) \left[h^{1/2} \right]_{h_1}^{h_2} = -t \quad (2.25)$$

$$\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0} = - \frac{t}{\left(\frac{A_d}{S} \sqrt{\frac{2}{g}} \right)} \quad (2.26)$$

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \left(\frac{S}{A_d} \sqrt{\frac{g}{2}} \right) t \right)^2 \quad (2.27)$$

La familia de curvas de la ecuación 2.27 se representa para distintas aperturas de la sección de salida en la figura 2.15. Nótese que el depósito se vacía en un tiempo *finito*, cosa que no ocurriría de tratarse de un sistema lineal.

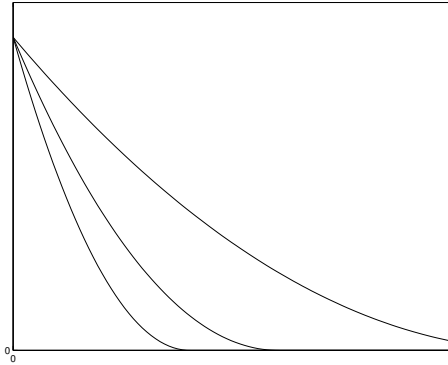


Figura 2.15: Familia de soluciones de la ecuación diferencial homogénea

Una aplicación inmediata de la ecuación 2.25 es encontrar el tiempo de vaciado del depósito dada su altura inicial h_0 .

$$t_v = \left(\frac{A_d}{S} \sqrt{\frac{2}{g}} \right) \left[h^{1/2} \right]_0^{h_0} = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{A_d}{S} h_0^{1/2} \quad (2.28)$$

Estimación de los parámetros de la ecuación diferencial

En la ecuación diferencial general 2.21 que se dedujo en el apartado 2.1.2 pueden agruparse los términos constantes que van multiplicando a las variables de estado y entradas de manera que sea necesario estimar menos parámetros para caracterizar completamente la dinámica del sistema “depósito”. Como contrapartida ocurrirá que los nuevos grupos de parámetros serán *dimensionalmente complejos y perderán su significado físico intuitivo*.

Así que a fin de reducir el número de parámetros que acompañan a los términos de las ecuaciones diferenciales se puede proceder a agruparlos de esta manera:

$$C(a) = \frac{\sqrt{2g}S(a)}{A_d} \quad (2.29)$$

$$b = \frac{1}{A_d} \quad (2.30)$$

quedando la ecuación 2.21 resumida de este modo:

$$\dot{h} = -C(a)\sqrt{h} + bq_e \quad (2.31)$$

El significado de los parámetros es el siguiente:

b : inversa del área del depósito, que nos es desconocida. Este parámetro acompaña al caudal de entrada en la ecuación diferencial. Sus unidades son m^{-2} cuando el caudal se expresa en m^3s^{-1} .

$C(a)$: contiene un término gravitatorio y la dependencia del área de salida. El área de salida S es sin duda función del grado de apertura de la válvula a , pero en una forma de dependencia desconocida. Se podría intuir que la dependencia con a es de una forma dada, como lineal o senoidal, pero *esto no se supondrá* y se harán experimentos para encontrar una expresión para la función $C(a)$. Sus unidades son $\sqrt{m}s^{-1}$ cuando la altura se expresa en m .

A continuación se trata de encontrar los valores concretos para estos parámetros que ajustan la dinámica de la maqueta de laboratorio elegida para experimentar.

Estimación de $C(a)$

En primer lugar, la estimación de $C(a)$ se hará indirectamente a través del *tiempo de vaciado del depósito desde una altura de 30 milímetros*. Partimos de la ecuación 2.28 para el tiempo de vaciado del depósito, que se puede expresar en términos de estos parámetros como sigue:

Si queremos estimar

$$C(a) = \sqrt{2g} \cdot \frac{S(a)}{A_d} \quad (2.32)$$

podemos hacerlo así,

$$C(a) = \sqrt{2g} \cdot \frac{S}{A_d} = 2 \left(\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \frac{S(a)}{A_d} \right) = 2 \frac{\sqrt{h_0}}{t_v} \quad (2.33)$$

A continuación se pasa a presentar los resultados de los experimentos. Todos ellos comienzan con el depósito lleno a $h_0 = 30\text{mm}$ ($4V$ en el sensor) y desde el estado de reposo (con la válvula cerrada) se le da a la válvula una determinada apertura y el depósito comienza a vaciarse. Se mide el tiempo t_v que tarda el vaciado y esto proporciona según 2.33 la estimación C_i para la apertura a_i correspondiente.

Hay que notar que no tiene sentido modelar lo que ocurre cuando la apertura a es 0, ya que obviamente el depósito no se vacía. *Ocurre lo mismo con apertura $a = 1/6$, esto es, que la válvula realmente no llega a permitir pasar al líquido.*

Apertura 6/6 (figura 2.16) El tiempo t_v en bajar es aproximadamente $t_v \approx 14s$

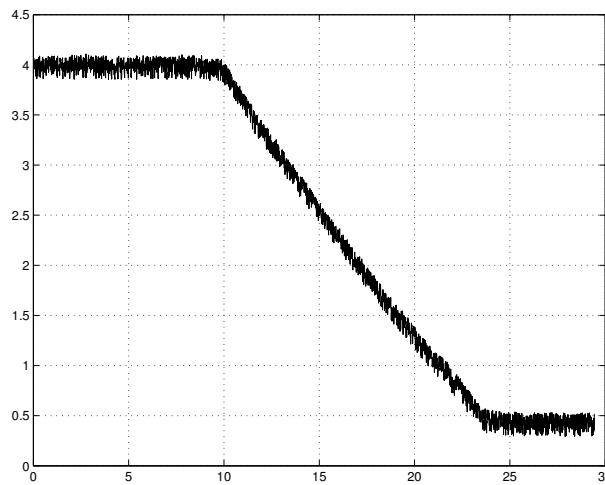


Figura 2.16: Vaciado del depósito con válvula a 6/6

Apertura 5/6 (figura 2.17) El tiempo t_v en bajar es aproximadamente $t_v \approx 15s$

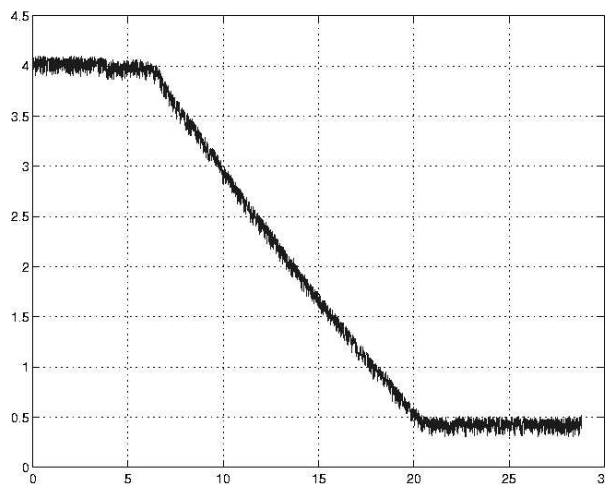


Figura 2.17: Vaciado del depósito con válvula a 5/6

Apertura 4/6 (figura 2.18) El tiempo t_v en bajar es aproximadamente $t_v \approx 17s$

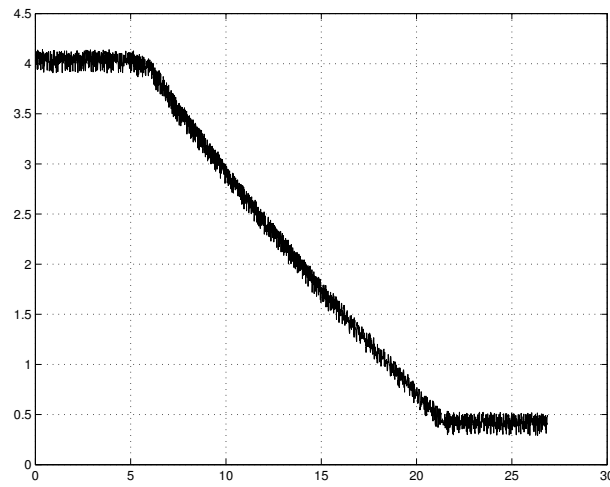


Figura 2.18: Vaciado del depósito con válvula a 4/6

Apertura 3/6 (figura 2.19) El tiempo t_v en bajar es aproximadamente $t_v \simeq 22s$

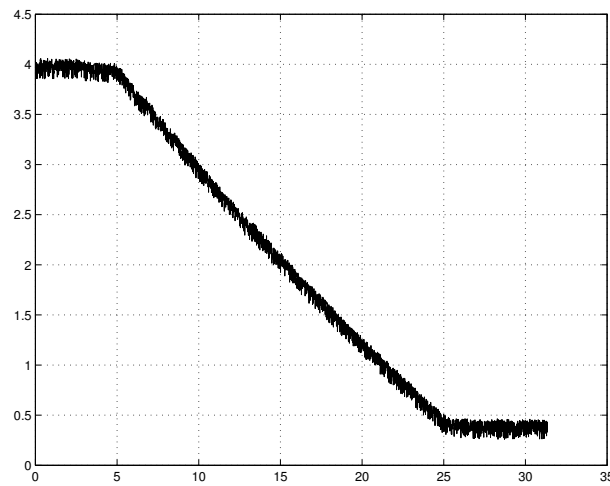


Figura 2.19: Vaciado del depósito con válvula a 3/6

Apertura 2/6 (figura 2.20) El tiempo t_v en bajar es aproximadamente $t_v \approx 51s$. Este tiempo es muy sensible a la posición del mando de la válvula y repitiendo el experimento de nuevo esta vez proporcionó

$$t_v \simeq 68s \quad (2.34)$$

La válvula es *muy* sensible en la cercanía de este punto y esto unido a la holgura de la manilla y la falta de una escala precisa de ángulos junto a la válvula no facilita la reproducibilidad de los experimentos.

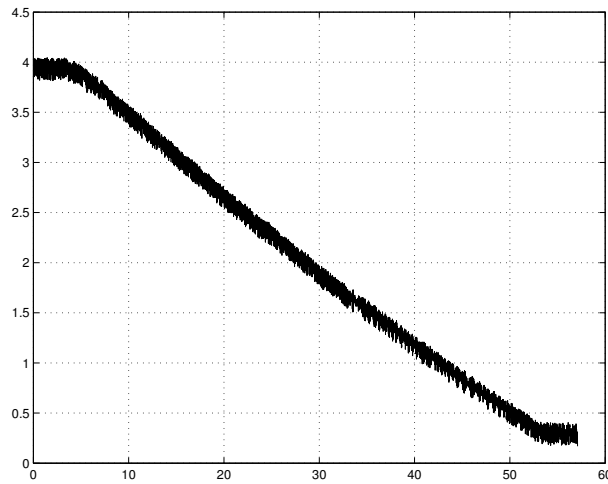


Figura 2.20: Vaciado del depósito con válvula a 2/6

Ahora que se tienen los datos relativos a los experimentos se pretende encontrar una explicación aceptable para la relación entre los distintos tiempos de vaciado del depósito y los correspondientes ángulos girados por la manilla unida a la válvula.

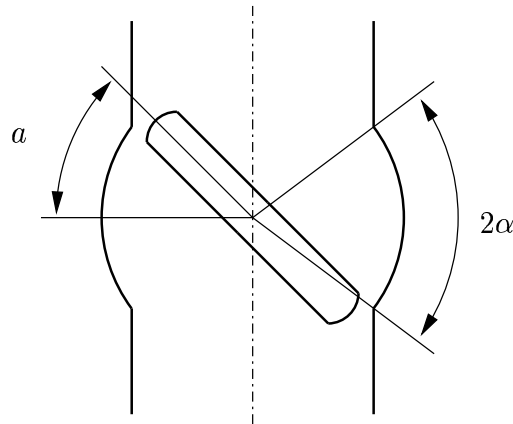


Figura 2.21: Dependencia de la sección de salida con el giro del mando

Las aperturas de la válvula han sido las siguientes:

$$\{0, 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6, 6/6\} \quad (2.35)$$

y les han correspondido los siguientes tiempos:

$$\{\infty, \infty, 51, 22, 17, 15, 14\} \quad (2.36)$$

Utilizando los dos juegos de valores se obtienen estimaciones para $C(a)$ mediante la ecuación 2.37.

$$C(a) = \frac{2\sqrt{h_0}}{t_v(a)} \quad (2.37)$$

Los valores encontrados son respectivamente:

$$\{0, 0, 6,79 \cdot 10^{-3}, 15,74 \cdot 10^{-3}, 20,39 \cdot 10^{-3}, 23,09 \cdot 10^{-3}, 24,74 \cdot 10^{-3}\} \quad (2.38)$$

Si no se muestran los pasos intermedios para la obtención de los datos, la relación entre apertura de válvula y valor de $C(a)$ puede expresarse cómodamente en la tabla 2.2

Apertura	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
$C(a) \cdot 10^3$	0	0	6.79	15.74	20.39	23.09	24.74

Cuadro 2.2: Valores observados para $C(a)$

Los valores de $C(a)$ son los anteriores multiplicados por 10^{-3} , así que en verdad el valor de la función $C(a)$ para $a = 6/6$ es $C(6/6) = 24,74 \cdot 10^{-3}$.

La relación representada en la figura 2.22 se puede ajustar a un polinomio que pase por los puntos correspondientes a las aperturas de la válvula en tanto por uno. A la vista de la

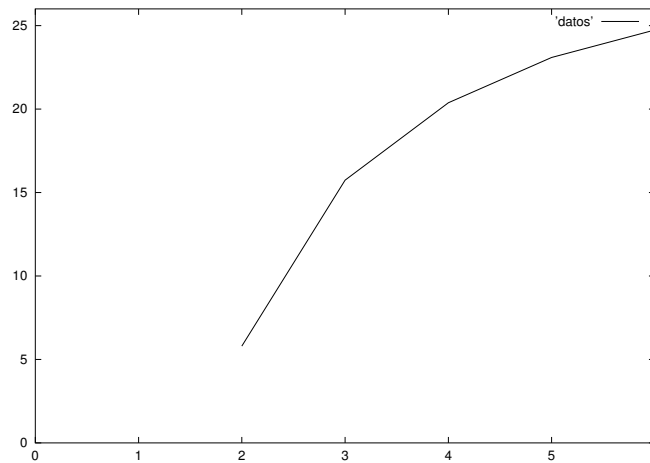
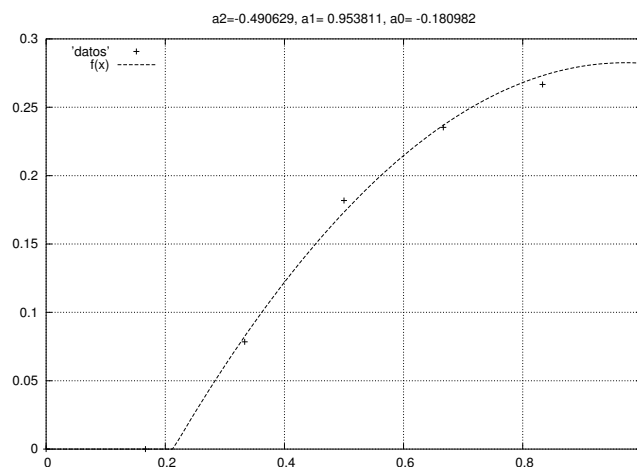
Figura 2.22: Representación de $C(a)$

figura 2.22, bastará con un polinomio de segundo grado. A este polinomio se le pide que pase por los puntos que se muestran en la tabla 2.3.

Apertura	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
$C(a)$	6.79	15.74	20.39	23.09	24.74

Cuadro 2.3: Puntos de control para el ajuste del polinomio

La estimación del polinomio se hizo mediante un script de comandos que se acompaña en el cdrom de la memoria para el lenguaje de matemática simbólica interno de *Gnuplot*. El resultado fue el ajuste mostrado en la figura 2.23.

Figura 2.23: Resultado del ajuste para $C(a)$

La función polinómica de segundo orden que mejor ajustó la función fue la que se muestra en la ecuación 2.39.

$$C(a) = \begin{cases} 0 & a \in [0, 0,2] \\ (-13,04 + 74,4a - 36,72a^2)10^{-3} & a \in (0,2, 1] \end{cases} \quad (2.39)$$

Dado que la ecuación diferencial se escribe en metros por segundo, esta estimación supone que en la ecuación diferencial la altura está expresada en metros y el caudal en voltios.

La dinámica del depósito puede por ahora describirse de forma independiente a la de la bomba si consideramos únicamente casos de vaciado sin caudal de entrada. Para este caso concreto, el depósito sería un sistema dinámico de primer orden cuya entrada es la apertura de la válvula. Este hecho puede aprovecharse para describir la ecuación de su dinámica en el espacio (a, h, \dot{h}) como una superficie $\dot{h} = f(h, a)$ 2.24).

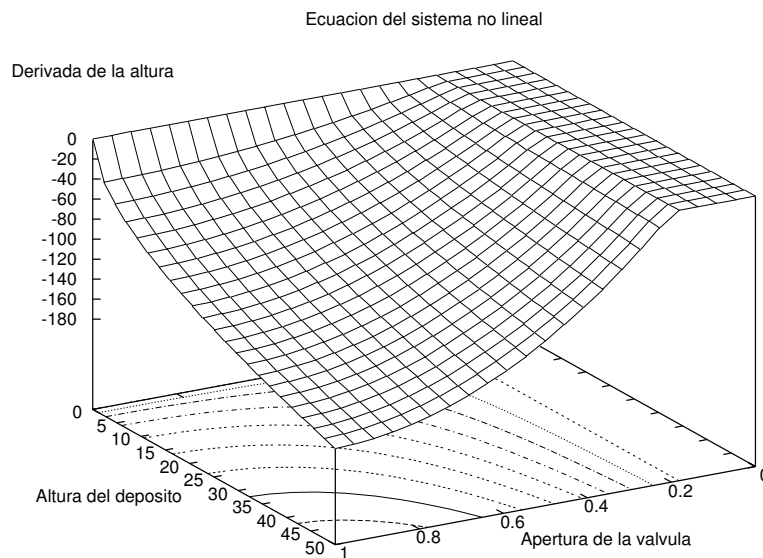


Figura 2.24: Vista de la superficie $\dot{h} = f(h, a)$

Obsérvese en la figura 2.25 cómo la derivada $d\dot{h}/dh$ es infinita sobre la recta $h = 0$ en el plano $\dot{h} = 0$.

Las trayectorias que seguiría el estado en un caso de evolución libre del depósito sobre esa superficie vendrían dadas por la curva intersección de la superficie $\dot{h} = f(h, a)$ de la ecuación diferencial con los planos dados por $a = \text{cte}$ como puede verse en la figura 2.26.

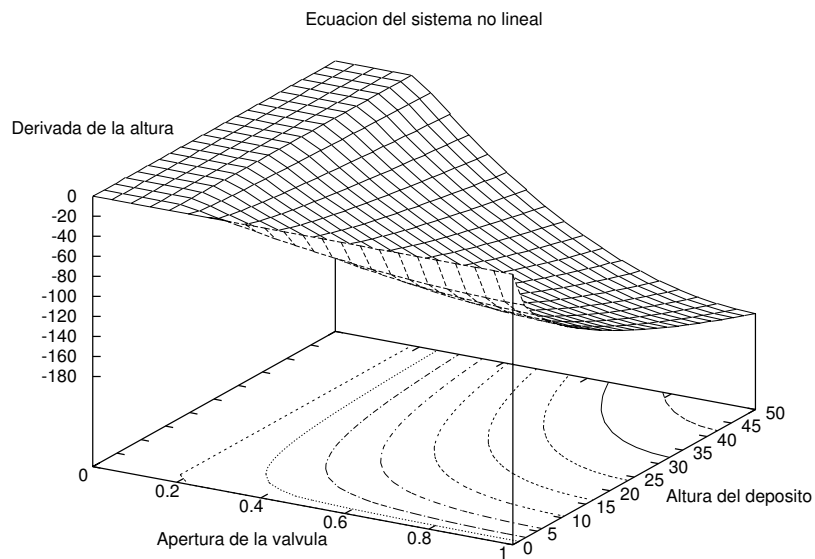


Figura 2.25: Vista lateral de la superficie $\dot{h} = f(h, a)$

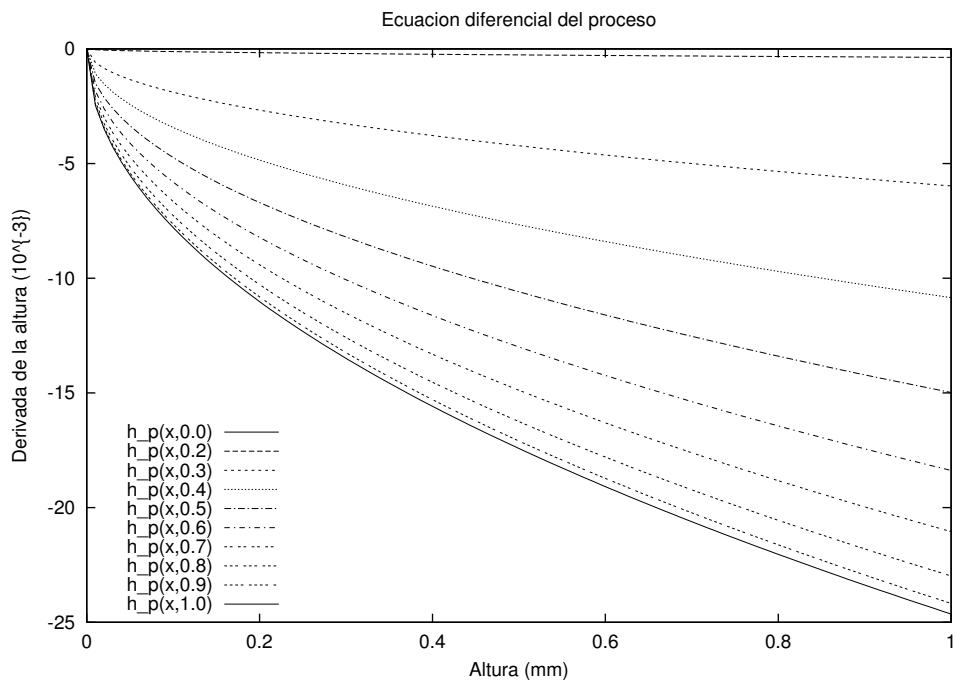


Figura 2.26: Trayectorias del estado para a constante

Sensor de altura

El sensor de altura proporciona una determinada señal en tensión que se corresponde con la magnitud física “altura del líquido en el depósito”. La calibración del sensor de altura será utilizada en varios simuladores y otros apartados ya que servirá para poder convertir las lecturas del sensor a unidades de longitud (centímetros, milímetros).

Puede pensarse en una primera aproximación que el sensor no tendrá dinámica o si la tiene que será mucho más rápida que la del depósito con lo que la evolución temporal de la señal del sensor de altura se corresponde con la de la altura real.

A continuación se intenta encontrar la ley que relaciona la altura real con la señal de altura dada por el depósito. Existen varios aspectos a tener en cuenta:

- El sensor da señal no nula ante altura nula.
- El sensor introduce una cierta cantidad de ruido que será necesario filtrar si se estima oportuno.

Para encontrar la relación buscada entre altura y tensión del sensor se puede operar de la siguiente manera: se llena el depósito hasta una serie de alturas *medidas sobre la escala marcada en el depósito* y se van anotado los valores medios de la señal que proporciona el sensor de altura.

Al barrer con la metodología anterior el rango de medidas del sensor de altura los resultados son los presentados en la tabla 2.4.

Altura	Tensión
50 mm	6.64 V
40 mm	5.30 V
30 mm	3.96 V
20 mm	2.76 V
10 mm	1.50 V
vacío	0.35 V

Cuadro 2.4: Resultados de la estática del sensor de altura

Se puede representar de forma gráfica la tabla 2.4 como puede verse en la figura 2.27.

La relación parece altamente lineal con lo que será posible ajustar la relación a una recta mediante una regresión.

Se busca entonces ajustar esta relación a algo del estilo de la expresión 2.40

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \quad (2.40)$$

Los estimadores máximo-verosímiles para β_0 y β_1 se notan como $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$. Para distribuciones marginales normales los estimadores máximo-verosímiles son los mínimo-cuadráticos.

Las estimaciones para las medidas son

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad (2.41)$$

Aplicando propiedades básicas de estadística se observa que

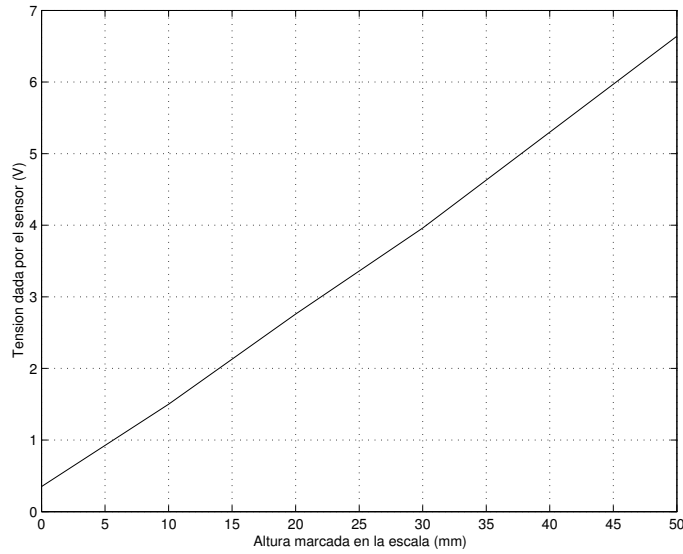


Figura 2.27: Relación estática del sensor

$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (2.42)$$

El estimador $\hat{\beta}_1$ viene dado por la expresión 2.43.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{COV(x, y)}{s_x^2} \quad (2.43)$$

El estimador $\hat{\beta}_0$ se obtiene de la siguiente forma

$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (2.44)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (2.45)$$

Se extraen las medidas de centralización y de dispersión a los datos de la tabla 2.43 y se obtienen los datos del cuadro 2.5.

	x	y
Media	25	3.4183
Varianza	291.6	4.6235

Cuadro 2.5: Parámetros de centralización y dispersión

La covarianza es

$$COV(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} \quad (2.46)$$

Para el caso concreto que nos ocupa su valor es

$$COV(x, y) = \frac{733}{6} - 25 \cdot 3,4183 = 36,708 \quad (2.47)$$

En resumen, el valor numérico para el estimador $\hat{\beta}_1$ es

$$\hat{\beta}_1 = \frac{36,708}{291,66} = 0,12586 \quad (2.48)$$

El valor numérico para el estimador $\hat{\beta}_0$ es

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 3,4183 - 0,12586 \cdot 25 = 0,272 \quad (2.49)$$

La relación buscada entre las magnitudes físicas y eléctricas viene entonces dada de forma máximo-verosímil por las ecuaciones 2.50 y 2.51:

$$u(V) = 0,272 + 0,12586 \cdot h(mm) \quad (2.50)$$

$$h(mm) = -2,1611 + 7,9453 \cdot u(V) \quad (2.51)$$

Donde una se deduce de la otra sin más que despejar la variable que se busca.

Estimación de b

Se trata ahora de estimar la constante b que va multiplicando al caudal de entrada en la ecuación diferencial 2.31. Hay que tener presente que puede tratarse de una constante pero no hay que descartar que los experimentos contradigan la estructura de la ecuación diferencial.

Se parte de la ecuación diferencial 2.52 ya antes presentada y nuestro objetivo es estimar la constante b , para lo cual se pueden explorar dos vías.

$$\dot{h} = f(h, a, q_e) = -C(a)\sqrt{h} + bq_e \quad (2.52)$$

Una primera idea podría ser que en un momento dado se midieran *a la vez* el juego de variables \dot{h} , h , q_e . Dado que se conoce la constante que multiplica a \sqrt{h} en la ecuación quedaría entonces una ecuación para la constante que multiplica a q_e . Esta opción es interesante porque tan sólo es necesario realizar una medida para obtener la estimación, pero por el contrario no es fácil estimar la derivada \dot{h} de una señal con tanto ruido como la que da el sensor de altura.³

Una segunda idea podría ser poner una cierta tensión en la bomba y dejar el tiempo pasar hasta alcanzar un régimen permanente en el caudal q_e y en la altura h del líquido en el tanque. La ventaja en contraposición con el método anterior es que en este caso puedo despreñar \dot{h} bastante certeramente sin más que dejar pasar tiempo suficiente. La estimación para b será entonces dada por la ecuación 2.53.

$$\dot{h} = -C(a)\sqrt{h} + bq_e \rightarrow 0 = -C(a)\sqrt{h_\infty} + bq_{e_\infty} \rightarrow b \approx \frac{C(a)\sqrt{h_\infty}}{q_{e_\infty}} \quad (2.53)$$

En este caso no se tienen problemas con el ruido porque se trata de estimar niveles de señales constantes y no hay más que tomar la media de un número suficiente de muestras. El principal problema es que la estimación de b dependerá de la estimación de $C(a)$ para el a elegido para hacer los experimentos.

La segunda opción parece más sencilla de realizar, así que será la elegida para experimentar de aquí en adelante. Se han realizado tres experimentos con la válvula totalmente abierta y la tabla 2.6 recoge las medidas observadas.

	1	2	3
Bomba	6.00	6.50	7.00
Caudal	4.61	5.34	5.73
Altura	1.65	3.41	4.60

Cuadro 2.6: Tabla de observaciones en los experimentos para b (medidas en voltios)

Hay que tener cuidado con las unidades en las que expresamos las magnitudes ya que la ecuación diferencial del sistema se expresa en ms^{-1} . Notar que no podemos tener una medida en magnitudes físicas del caudal por la bomba y su medida está disponible únicamente en voltios. Entonces las dimensiones del parámetro b vienen dadas por la expresión 2.54.

$$[b] = \frac{m}{V \cdot s} \quad (2.54)$$

³ver el apéndice B sobre cómo afrontar el problema.

Para traducir las alturas de la tabla 2.6 a metros y más tarde introducirlas en la ecuación 2.53 se hace uso de la relación encontrada en la sección 2.1.2 donde se calibra el sensor de altura. La nueva serie de alturas se muestra en la tabla 2.28.

$h(V)$	1.65	3.41	4.60
$h(mm)$	11.0	25.0	34.4

Figura 2.28: Relación entre altura y tensión

La estimación que se usará para la constante que afecta a la raíz de la altura del depósito es $C(a) \approx 24,64 \cdot 10^{-3} \sqrt{m/s}$.

Esto es suficiente ya para formar la tabla 2.29 con las estimaciones para b ,

$u(V)$	6.0	6.5	7.0
b	0.0005606	0.0007300	0.0007978

Figura 2.29: Tabla para b

La tabla 2.29 se puede ver en forma de gráfico en la figura 2.30.

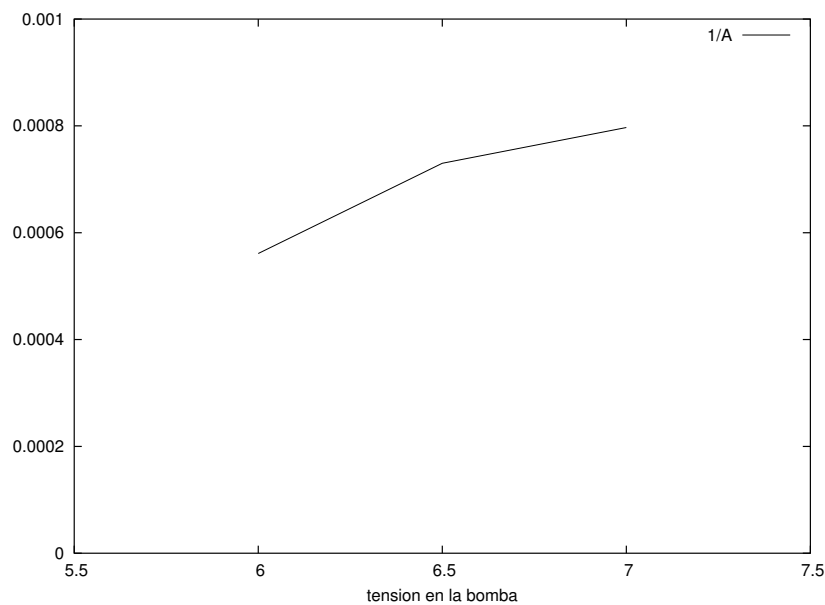


Figura 2.30: Valores para b

Se observa que no es constante sino que debe existir seguramente alguna razón por la cual a mayores caudales de entrada (y por tanto mayores alturas en el tanque) la constante que va afectando al caudal en la entrada es ligeramente mayor.

La estimación final para b es por tanto

$$b \approx 0,0006961 \quad (mV^{-1}s^{-1}) \quad (2.55)$$

2.1.3. Resumen del modelo teórico del depósito

La forma de la ecuación diferencial que gobierna la dinámica es la mostrada en 2.56.

$$\dot{h} = -C(a) \cdot \sqrt{h} + b \cdot q_e \quad (2.56)$$

con $C(a)$ en \sqrt{m}/s según

$$C(a) = \begin{cases} 0 & a \in [0, 0,2] \\ (-13,04 + 74,4a - 36,72a^2)10^{-3} & a \in (0,2, 1] \end{cases}$$

La mejor estimación de b es $b \approx 0,0006961$ (m/sV).

Recuerdo que la ecuación se escribe en m/s y represento h en m así como a en pu . El caudal q_e se introduce en voltios, como en la ecuación de la bomba.

Con todo lo anterior, y si se mantiene la válvula totalmente abierta la ecuación 2.56 se convierte en la ecuación 2.57.

$$\dot{h}(m/s) = -24,64 \cdot 10^{-3}(\sqrt{m}/V) \cdot \sqrt{h(m)} + 0,0006961(m/sV) \cdot q_e(V) \quad (2.57)$$

2.1.4. Modelo empírico del tanque

En este apartado se explica la confección de un modelo basado en la experimentación como alternativa al modelo basado en ecuaciones diferenciales presentado en la sección 2.1.2.

El objetivo de esta sección es llegar a una expresión de la forma $\dot{h} = f(h, a, q_e)$ utilizando los mínimos argumentos teóricos.

Partimos del conocimiento de que el depósito se comporta como un sistema de primer orden porque ante un escalón en la apertura de la válvula la altura arranca con derivada no nula.

El experimento diseñado para la ocasión consiste en partir de una altura elevada y dejar vaciar el depósito para que en la caída el estado recorra todo el rango de la variable de salida. Se toma entonces la señal y se calcula en cada instante *el valor que da el sensor de altura y su derivada*. El experimento realizado se representa en la figura 2.31.

Esto presenta dos problemas:

- Hay que estimar el valor de la función en cada instante, lo que va a hacer necesario un filtrado adecuado.
- Lo que es más grave, hay que estimar en cada instante *la derivada del estado*. Esto no es tarea fácil, pues la señal filtrada con el mayor cuidado aún presenta el rizado de las frecuencias de ruido que se mezclan con el contenido frecuencial de la señal. En esas condiciones emplear técnicas de tipo cociente incremental para estimar la derivada es ineficaz ya que *la derivada viene dada sobre todo por el ruido aditivo*. Esto no es evitable bajando la frecuencia de corte para el filtrado, ya que de ese modo nos comemos contenido frecuencial de la señal y la estimación de la derivada deja de corresponderse con la derivada real.

La solución al segundo problema pasa por utilizar un método de derivación robusta que reduzca el cálculo de la derivada al cálculo de una convolución que se demuestra insensible al ruido blando aditivo.⁴

⁴ver apéndice B.

Tras superar el problema de estimar el punto y la derivada se llevan los puntos $\langle h_i, \dot{h}_i \rangle$ por parejas a una gráfica del tipo “plano de fases” como $\dot{h} = f(h)$ (ver figura 2.32).

La figura 2.32 representa la ecuación diferencial que gobierna el proceso de vaciado libre

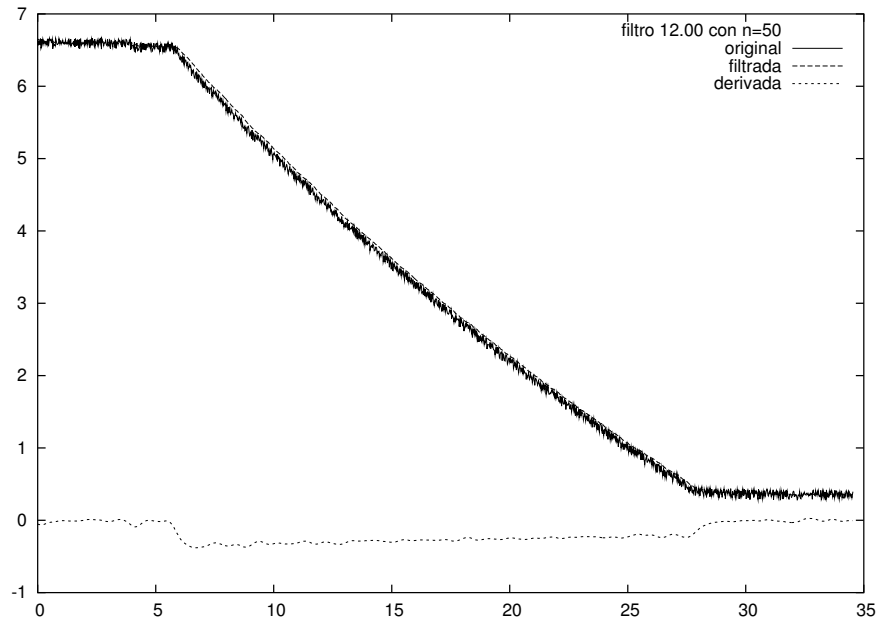


Figura 2.31: Dinámica del depósito en caída libre

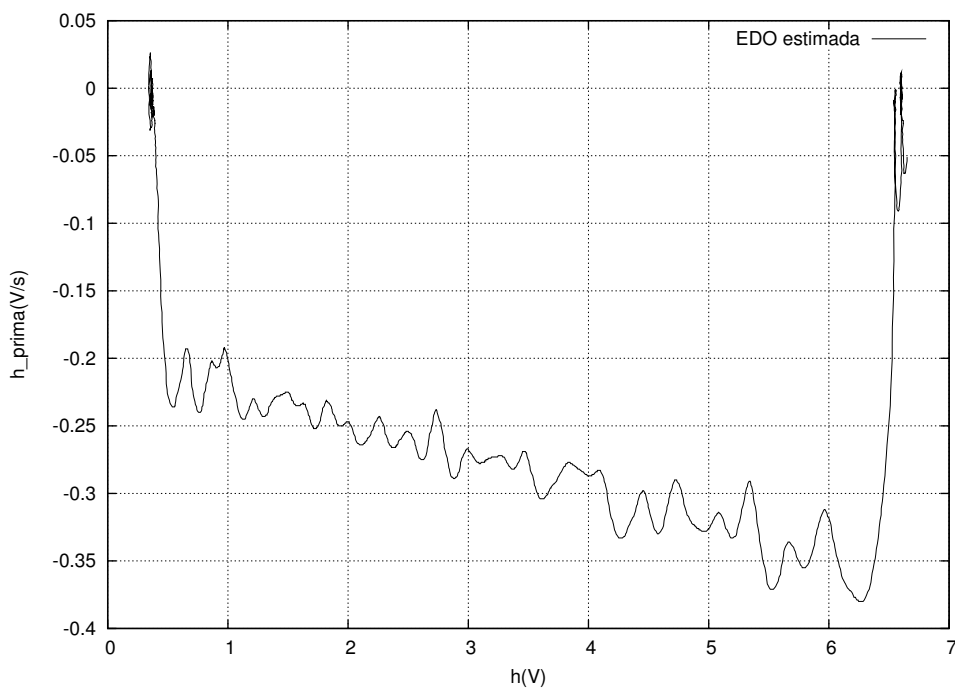


Figura 2.32: Ecuación diferencial inferida

del depósito salvando los errores numéricos cometidos al filtrar, estimar valor y derivada.

Se puede apreciar que la forma de la ecuación diferencial es similar a una recta, lo que indica que quizá se trate de una relación afín entre \dot{h} y h .

La recta puede estimarse fácilmente como

$$\dot{h} + [A + B h] = 0$$

con

$$A = 0,2038 \text{ Vs}^{-1} \quad (2.58)$$

$$B = 0,0227 \text{ s}^{-1} \quad (2.59)$$

Notar que esta ecuación diferencial está escrita en voltios. Las medidas de la altura y del caudal se realizan en voltios, así que las unidades de esas constantes son las indicadas.

Dependencia del caudal de entrada

La dependencia de la derivada de la altura con el caudal de entrada debe ser aditiva según un balance de masas al sistema “depósito”. Este resultado es tan fundamental que no se dudará de su veracidad, así que se supone que la ecuación diferencial del sistema toma la forma de la ecuación 2.60.

$$\dot{h} + (A + Bh) = D q(V) \quad (2.60)$$

Para estimar la constante D se pasa al límite en la expresión 2.60 para llegar a la expresión 2.61.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{h} + \left(A + B \lim_{t \rightarrow \infty} h \right) = D \lim_{t \rightarrow \infty} q \quad (2.61)$$

$$A + B h_{\infty} = D q_{\infty} \quad (2.62)$$

Se puede entonces estimar D mediante la expresión 2.63.

$$D = \frac{A + B h_{\infty}}{q_{\infty}} \quad (2.63)$$

La experimentación necesaria para la estimación de D se realiza siguiendo los pasos indicados:

1. Se pone tensión constante en la bomba y se deja estabilizar el caudal
2. Se deja estabilizar la altura
3. Se apuntan caudal y altura de equilibrio

Repetiendo este proceso varias veces para distintas tensiones en la bomba se obtiene una relación entre q_{∞} y h_{∞} aproximadamente constante.

$$D \approx 0,055005 \quad (2.64)$$

Tras el trabajo de identificación experimental llegamos a la ecuación diferencial 2.65.

$$\dot{h} + (0,2038 + 0,0227 h) = 0,055 q \quad (2.65)$$

2.1.5. Simulaciones de los modelos

Una vez que contamos con los dos modelos matemáticos de la maqueta se escriben los respectivos simuladores con el objetivo de contrastar la bondad del ajuste de cada modelo. Ambos simuladores se han escrito en el lenguaje de programación numérica de *Octave* según las ecuaciones obtenidas anteriormente en la memoria.

Se realizaron varias simulaciones para ver cual de los dos modelos del depósito explicaba mejor las señales que se observan en la maqueta y a continuación se presentan las respuestas de la maqueta y de los modelos ante las mismas condiciones iniciales.

- Vaciado libre con la válvula abierta desde $h = 3 \text{ cm}$

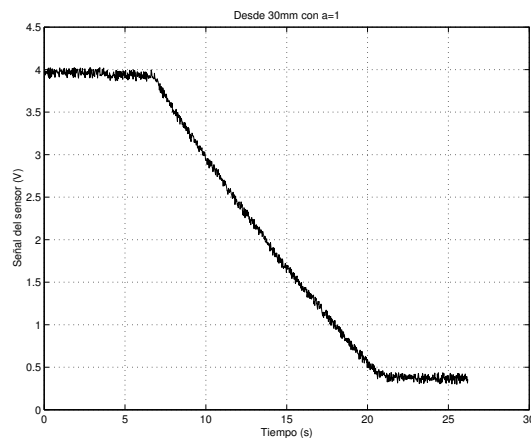


Figura 2.33: Vaciado del depósito desde 3 cm

- Vaciado libre con la válvula abierta desde $h = 5 \text{ cm}$

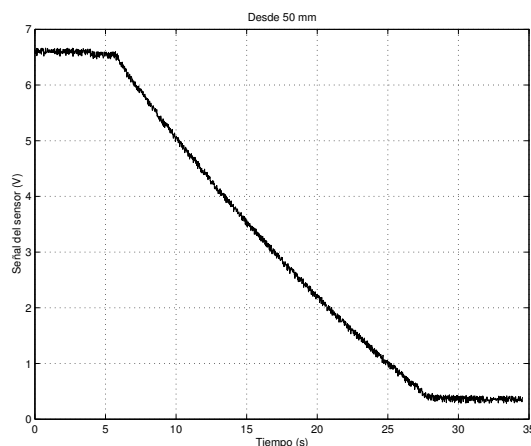


Figura 2.34: Vaciado del depósito desde 5 cm

Simulador del modelo teórico

- Vaciado libre con la válvula abierta desde $h = 3 \text{ cm}$

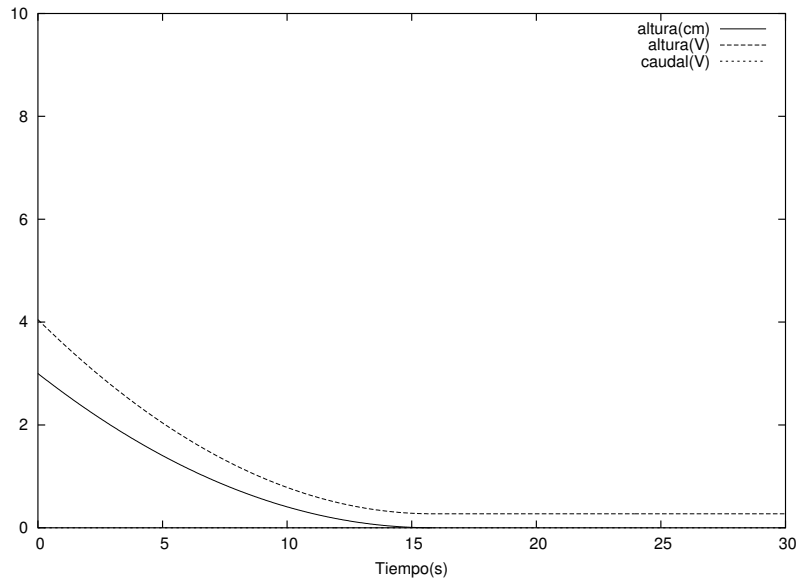


Figura 2.35: Vaciado según la EDO teórica desde 3 cm

- Vaciado libre con la válvula abierta desde $h = 5 \text{ cm}$

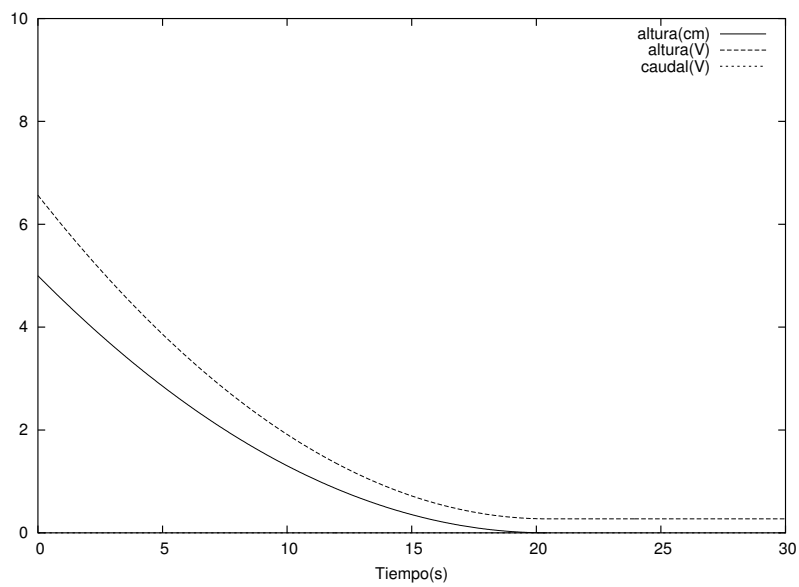


Figura 2.36: Vaciado según la EDO teórica desde 5 cm

Simulador del modelo inferido

- Vaciado libre con la válvula abierta desde $h = 3 \text{ cm}$

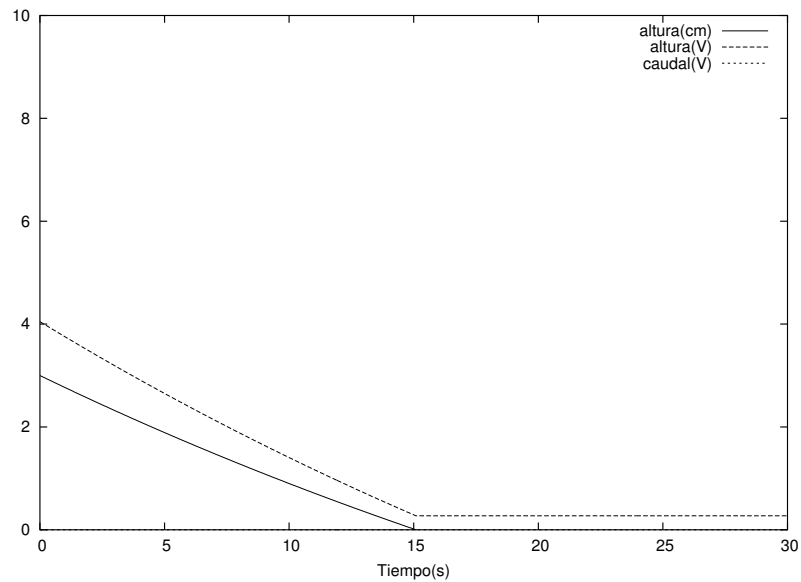


Figura 2.37: Vaciado según la EDO inferida desde 3 cm

- Vaciado libre con la válvula abierta desde $h = 5 \text{ cm}$

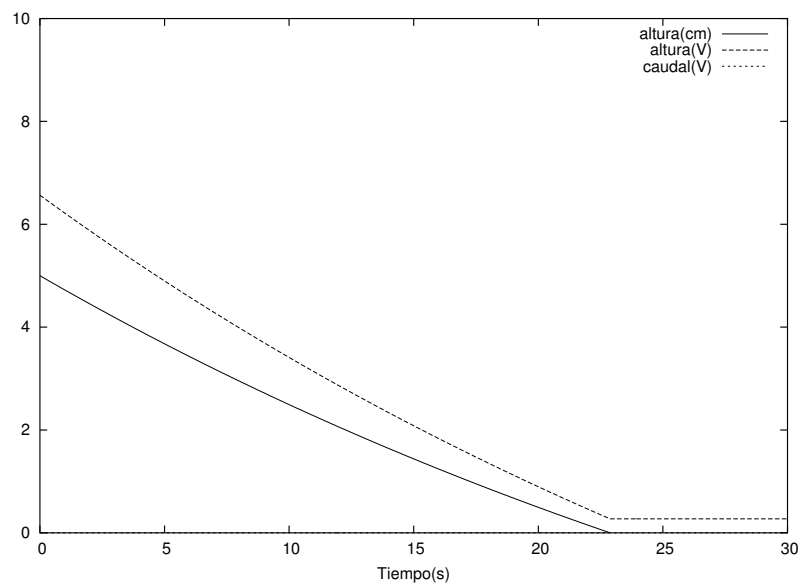


Figura 2.38: Vaciado según la EDO inferida desde 5 cm

De la comparación realizada entre las señales se construye la siguiente tabla:

Sistema	Tiempo de vaciado 3 cm	Tiempo vaciado 5 cm
Real	14	22
Modelo raíz	15	18
Modelo inferido	15	22

La aproximación que da el modelo inferido es mejor en cuanto a tiempos de vaciado, además de que el parecido con la señal es mucho mayor: notar que las respuestas del modelo teórico del depósito *llegan a altura nula con derivada nula* mientras que el modelo inferido predice que *se llega a altura nula con derivada no nula*, como realmente ocurre.

Por tanto podemos concluir que el modelo inferido es más aproximado que el modelo teórico del depósito y representa más fielmente la dinámica de la maqueta.

Llegado este punto se cierra esta vía de estudio ya que se ha llegado a un modelo que describe adecuadamente el comportamiento de la maqueta pero que es básicamente un sistema de dinámica afín con no linealidades “duras”: una zona muerta, saturaciones y retardo en el tiempo. Este tipo de sistemas no son adecuados para desplegar las técnicas de modelado borroso, así que se termina aquí el estudio de esta maqueta.

2.2. Modelado de la maqueta térmica

En esta sección se presentan los modelos extraídos a la maqueta térmica y su preparación para la confección de modelos borrosos.

Se comienza por una descripción de la maqueta en la sección 2.2.1. En la sección 2.2.2 se extrae un modelo que represente la dinámica de la maqueta y se llegará a un sistema lineal de tercer orden que representa perfectamente al sistema dinámico físico.

Este hecho es en verdad un contratiempo pues precisamente se busca un sistema que no pueda ser representado en todo el rango de sus variables de estado por un sistema lineal. Por ello se dedica la sección 2.2.3 a buscar formas de transformar el sistema para lograr hacer más interesante su dinámica.

Tras llegar a un resultado teórico sobre el esquema de transformación antes propuesto (y que se comprueba válido más tarde mediante un simulador) en la sección 2.2.4 se pasa a discutir las diferentes vías abiertas para implementar el esquema elegido para la transformación del sistema.

Una vez implementado el esquema seleccionado se pasa en la sección 2.2.5 a presentar las propiedades dinámicas del sistema realimentado y se comprueban ciertas las predicciones que en la sección 2.2.3 se desprendieron a la vez del estudio de las ecuaciones diferenciales y de las simulaciones.

Se observa que el nuevo sistema es suficientemente interesante como para centrar en él la confección de los sistemas borrosos así que se toma a la maqueta ahora transformada como nuevo sistema no-lineal y se comienza su estudio como si no se conociera nada respecto de su dinámica o su estática. En la sección 2.2.7 se extraen los modelos lineales que representan al nuevo sistema en los extremos de la variable de salida.

En la sección 2.2.8 se presentan los modelos lineales anteriores en términos de variables de estado.

Se cierra el capítulo 2 pues con el material necesario para acometer la confección de modelos borrosos en el capítulo 3.

2.2.1. Descripción de la maqueta

La maqueta objeto del estudio es un sistema térmico también fabricado por la casa alemana *Elwe*. Consta básicamente de una resistencia que calienta un recinto cerrado dentro de la maqueta en el que se encuentra una termorresistencia que, dotada de la electrónica necesaria, proporciona una señal eléctrica normalizada entre 0 y 10 voltios a la salida. El panel frontal puede observarse en la figura 2.39.

En el panel pueden distinguirse diferentes partes:

- Tres terminales blancos para alimentar la maqueta y su electrónica a -15,0 y 15 voltios.
- Una señal eléctrica y de entrada a la maqueta, normalizada entre 0 y 10 voltios para alimentar a la resistencia interna y aumentar así la temperatura.
- Un mando para elegir entre entregar toda la potencia a la carga o tan solo el 50%.
- Una señal X_r proporcionada por el sensor de temperatura de la maqueta.
- Una ventana que se puede abrir para así generar una perturbación a la dinámica de la maqueta. Se ha entendido que la utilidad de la ventana era esa y no se ha tenido en cuenta para realizar el modelado.

En este caso el esquema de bloques del sistema es bastante más sencillo que el correspondiente al sistema hidráulico (figura 2.4) como puede verse en la figura 2.40.

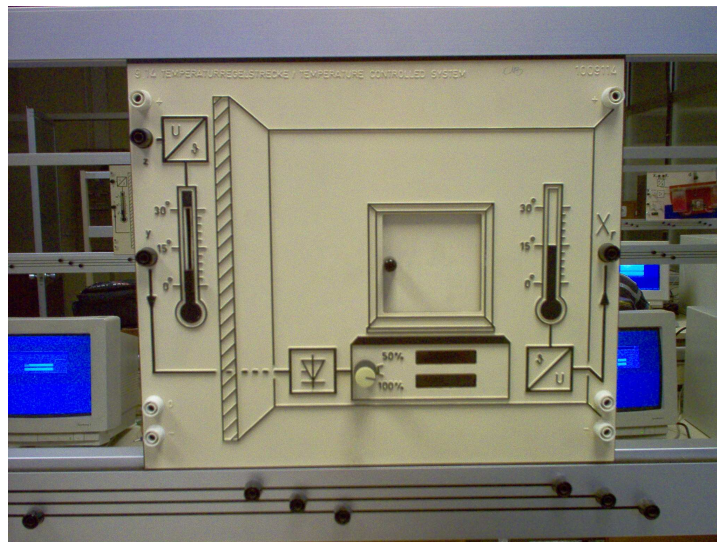


Figura 2.39: Fotografía de la maqueta térmica

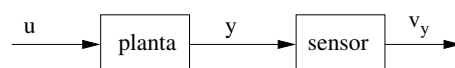


Figura 2.40: Esquema de bloques del sistema térmico

2.2.2. Extracción de un modelo para la maqueta térmica

En esta sección se presentan los experimentos realizados para obtener un buen modelo del sistema físico junto con los resultados de los mismos. Como se trata de encontrar modelos que representen el comportamiento estático y dinámico del sistema físico se buscarán los sistemas de primer y tercer orden más verosímiles en términos de máximo parecido de las respuestas temporales mediante algoritmos de búsqueda óptima por minimización de cuadrados.

Estudio de la característica estática

Para identificar la característica estática se excita al sistema con una serie de entradas constantes a distintos valores, se le deja evolucionar hasta alcanzar el régimen permanente y se anota el valor de la variable de salida. Los resultados se muestran en la tabla 2.7.

Entrada (V)	Salida (V)
0	0.07
1	0.93
2	1.89
3	2.92
4	3.90
5	4.88
6	5.87
7	6.89
8	7.86
9	8.83
10	9.78

Cuadro 2.7: Tabla de la estática de la maqueta térmica

Los valores anteriores quedan más claramente representados en la figura 2.41

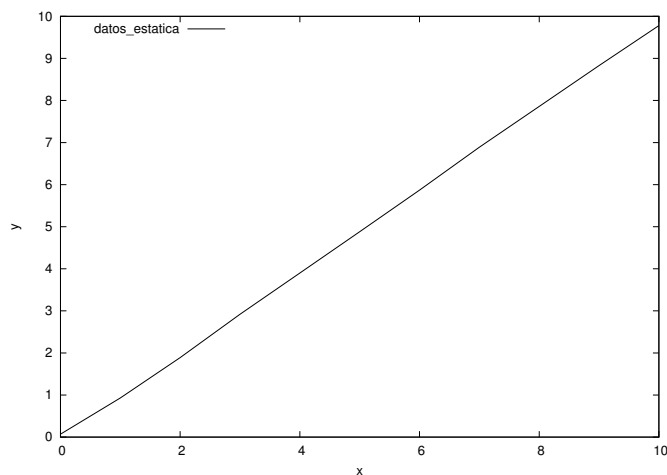


Figura 2.41: Estática del sistema térmico

La distribución de los puntos es aproximable de manera muy fiel mediante una recta. Para estimar los parámetros de la recta se realiza una regresión simple sobre los datos de la muestra. Se ajustan a un modelo como el representado en la ecuación 2.66.

$$y = \beta_0 + \beta_1 u \quad (2.66)$$

En la ecuación anterior los valores más verosímiles para los estimadores de β_0 y β_1 son

$$\hat{\beta}_0 = -0,015 \quad (2.67)$$

$$\hat{\beta}_1 = 0,9815 \quad (2.68)$$

Con estos valores podemos ajustar los valores a la recta dada por la ecuación 2.69

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = -0,015 + 0,9815 u \quad (2.69)$$

Como puede verse en la figura 2.42 el ajuste de la recta a los datos es muy bueno.

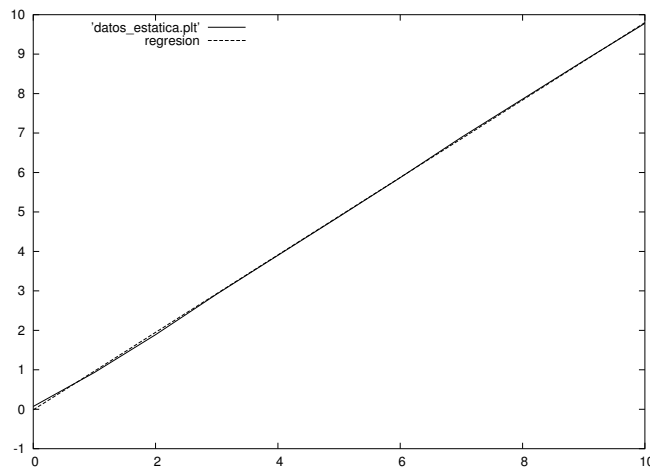


Figura 2.42: Regresión sobre la estática del sistema térmico

Captura de señales para el estudio de la dinámica

Para obtener un modelo que represente al sistema en el mayor rango de las variables de estado posible se ha dividido el rango de la variable de salida en varias zonas y se ha confeccionado un modelo para cada zona. La idea detrás es que si los modelos para cada zona son muy parecidos se podrá entonces decir que la maqueta se comporta como un *sistema lineal* en el rango de la variable estudiada.

También se ha tenido en cuenta que respuesta de los sistemas no lineales puede depender tanto de la magnitud del escalón de entrada como del sentido en que se aplica.

Por ejemplo, téngase el sistema dado por la ecuación diferencial 2.70

$$\dot{x} + x(u - u_c) = 0 \quad (2.70)$$

Con condiciones iniciales $x_0 > 0$ la evolución es muy diferente según la entrada al sistema sea mayor o menor que u_c .

Si la entrada es mayor que u_c y llamamos $u_d = u - u_c > 0$ tendríamos

$$x(t) = x_0 e^{-u_d t} \quad t \geq 0 \quad (2.71)$$

Si por el contrario es menor que u_c sería $u_d = u - u_c < 0$ y tendríamos una respuesta no acotada en el tiempo provocada por una respuesta acotada. Podemos decir de paso que el sistema *es inestable* por no ser *bibo* (*bounded input- bounded output*)

Al realizar los modelos y para tener esta idea en cuenta *no se supondrá que la respuesta ante un escalón de magnitud negativa es la misma que la respuesta ante el escalón positivo pero en sentido contrario*, sino que se repetirán los experimentos con escalones negativos.⁵

Se han tomado las respuestas del sistema frente a la siguiente serie de escalones:

0	→	2
2	→	4
4	→	6
6	→	8
8	→	10
0	→	10
10	→	8
8	→	6
6	→	4
4	→	2
2	→	0
10	→	0

El sensor a través del cuál se toman las temperaturas está inevitablemente incluido dentro de las fronteras del sistema y por tanto no es posible identificarlo por separado. Este sensor introduce ruido en la señal de salida que puede ser molesto para los métodos numéricos que se van a pasar a las señales, así que será necesario filtrarlo adecuadamente intentando no modificar el contenido en frecuencias de la señal original. En este caso se ha implementado un filtro discreto de primer orden mediante un pequeño script con un listado de instrucciones para *Octave*.

Las señales originales tomadas con una frecuencia de muestreo de 20 Hz pueden verse en forma de nube de puntos junto con sus correspondientes señales filtradas a 1 Hz en trazo discontinuo. Tan solo se muestran las versiones “hacia arriba”, pero también se han capturado y filtrado las correspondientes “hacia abajo”.

⁵ ver más tarde 2.2.5.

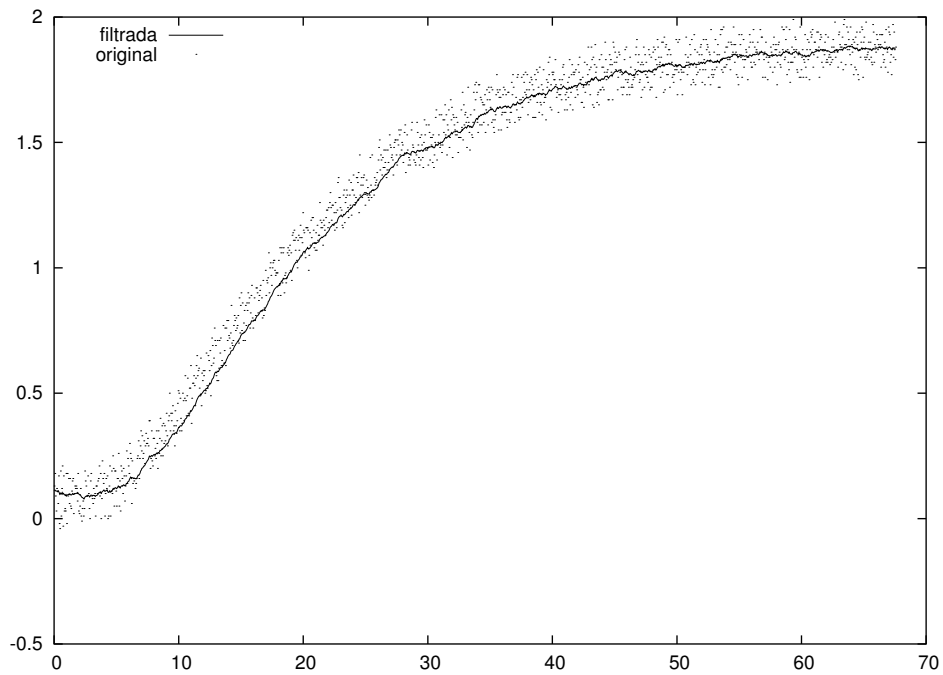


Figura 2.43: Señal respuesta ante escalón de 0 a 2 V filtrada

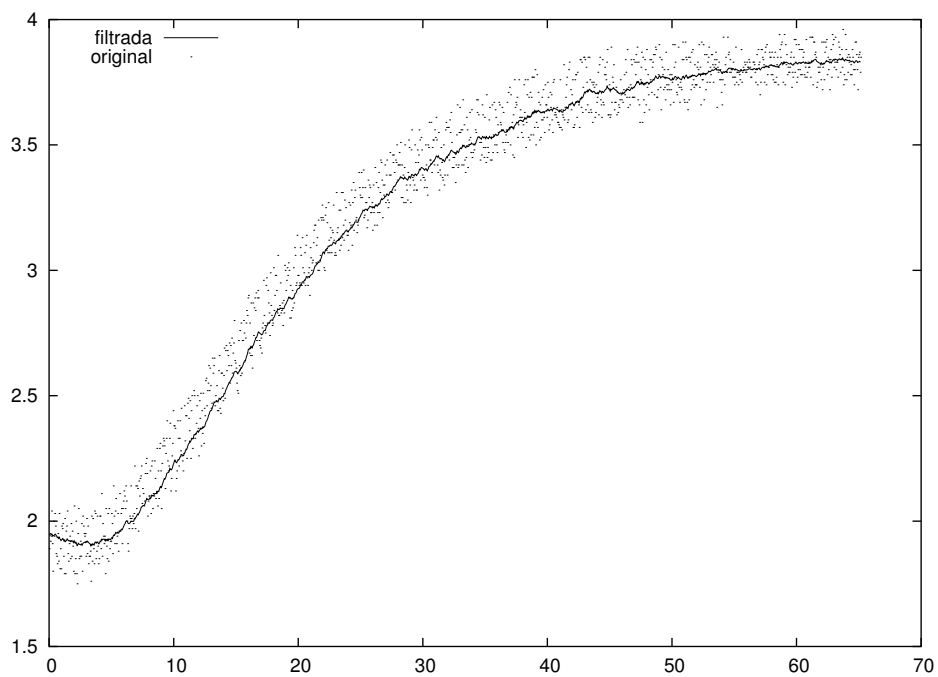


Figura 2.44: Señal respuesta ante escalón de 2 a 4 V filtrada

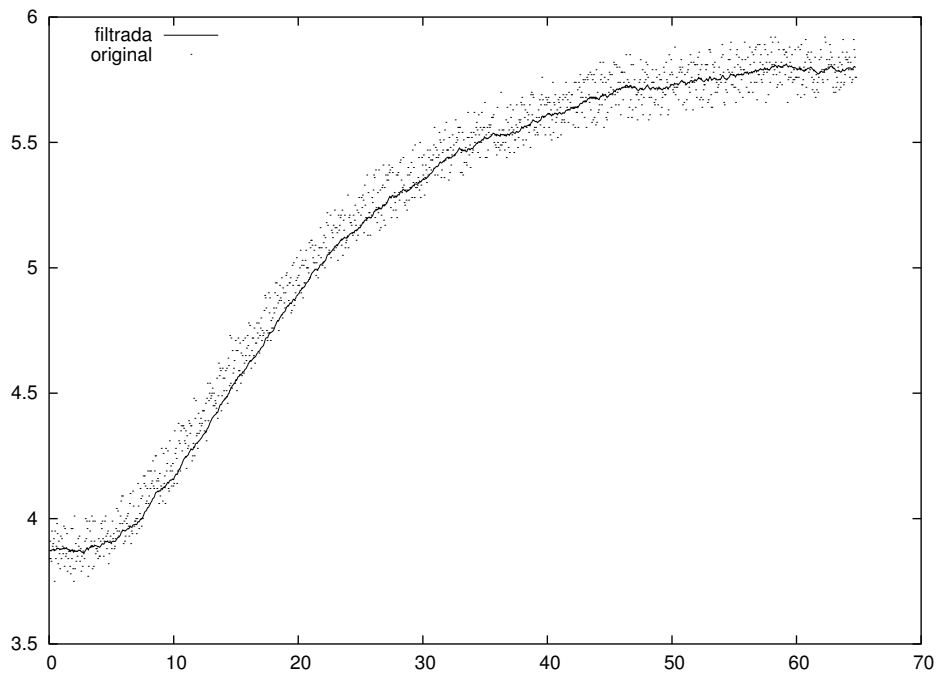


Figura 2.45: Señal respuesta ante escalón de 4 a 6 V filtrada

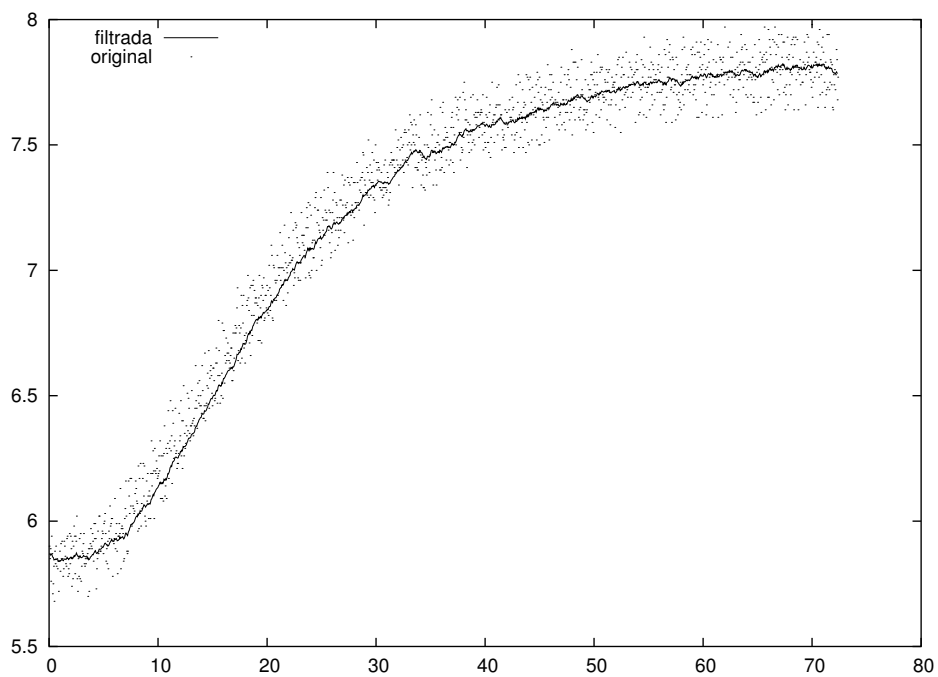


Figura 2.46: Señal respuesta ante escalón de 6 a 8 V filtrada

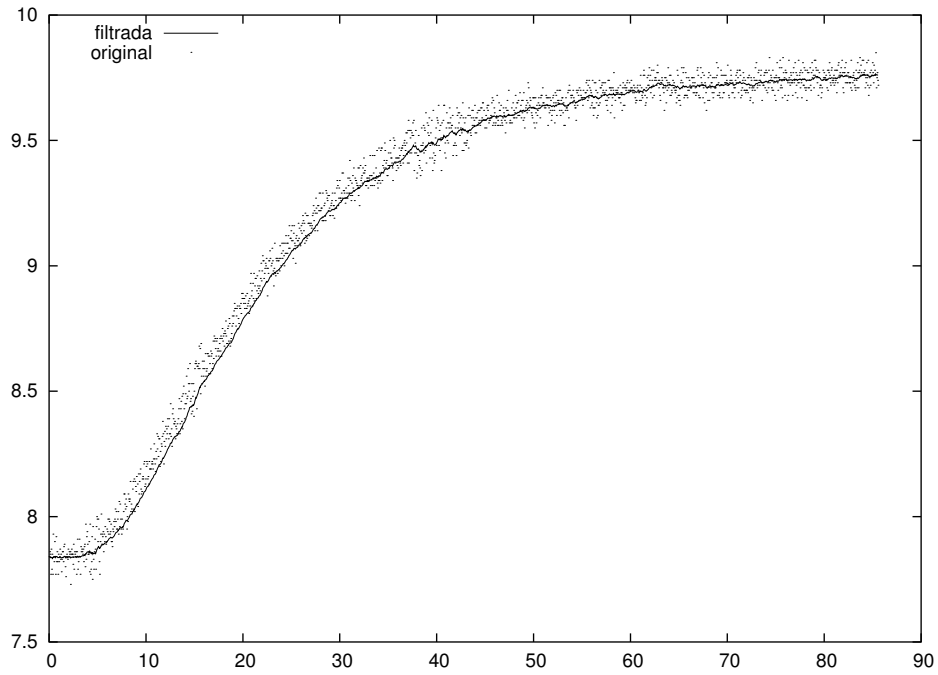


Figura 2.47: Señal respuesta ante escalón de 8 a 10 V filtrada

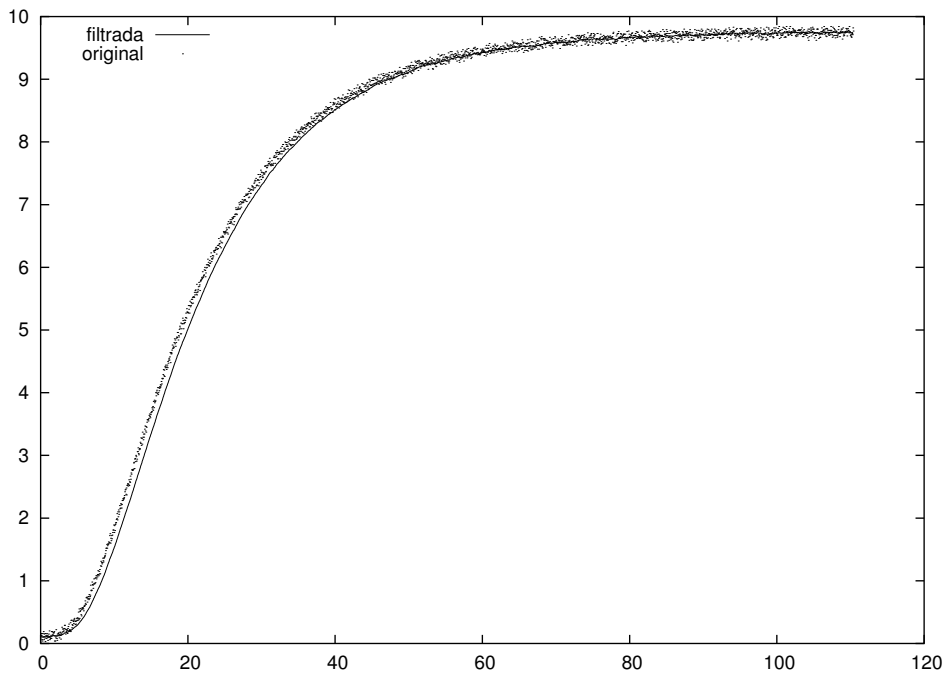


Figura 2.48: Señal respuesta ante escalón de 0 a 10 V filtrada

Ajuste a primer orden

Se pretende encontrar el juego de parámetros de un sistema de primer orden que haga que la respuesta ante escalón del mismo se aproxime lo máximo posible a las señales que se registraron y filtraron en el apartado anterior.

Se parte de la expresión general 2.72 de la función de transferencia de un sistema lineal de primer orden en la variable de Laplace.

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} \quad (2.72)$$

La respuesta ante escalón de este sistema se obtiene antitransformando por Laplace la expresión anterior, resultando

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ k(1 - e^{-t/T}) & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

Es de esperar por la forma de la respuesta ante escalón del sistema físico que una respuesta de un sistema de primer orden se ajuste bastante mal dado que el sistema real arranca con derivada nula ante escalón, lo que indica que es como mínimo de orden 2. Por este motivo se tiende a compensar el área que queda entre la respuesta del sistema de primer orden y el real, quedando el sistema de primer orden con una ganancia menor en el permanente. Con todo esto, se ha considerado adecuado fijar la ganancia en la estimación anterior $k = 0,9815$ y sacar k del método de minimización. De este modo el método numérico de mínimos cuadrados únicamente debe buscar el valor de la constante de tiempo más verosímil, o lo que es lo mismo, el valor del polo real que minimiza la distancia en mínimos cuadrados entre las dos señales.

Para realizar el ajuste se hace uso de nuevo de las funciones *fit* de *Gnuplot* para cada una de las señales.

Los resultados se presentan en la tabla 2.8

Experimento	T
$0 \Rightarrow 10$	23.76
$0 \Rightarrow 2$	26.45
$2 \Rightarrow 4$	23.16
$4 \Rightarrow 6$	22.90
$6 \Rightarrow 8$	23.05
$8 \Rightarrow 10$	24.63
$10 \Rightarrow 0$	23.79
$10 \Rightarrow 8$	24.20
$8 \Rightarrow 6$	22.00
$6 \Rightarrow 4$	23.76
$4 \Rightarrow 2$	22.68
$2 \Rightarrow 0$	26.57

Cuadro 2.8: Estimaciones para T en primer orden

Estas son algunas de las señales que muestran cada ajuste individual.

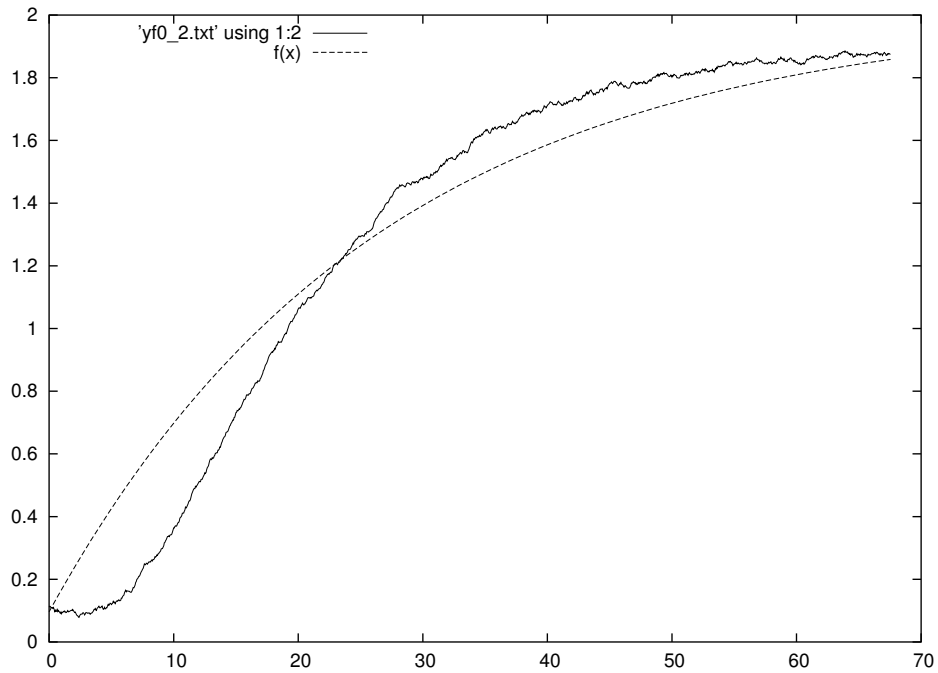


Figura 2.49: Ajuste de la respuesta ante escalón de 0 a 2 voltios del sistema de primer orden

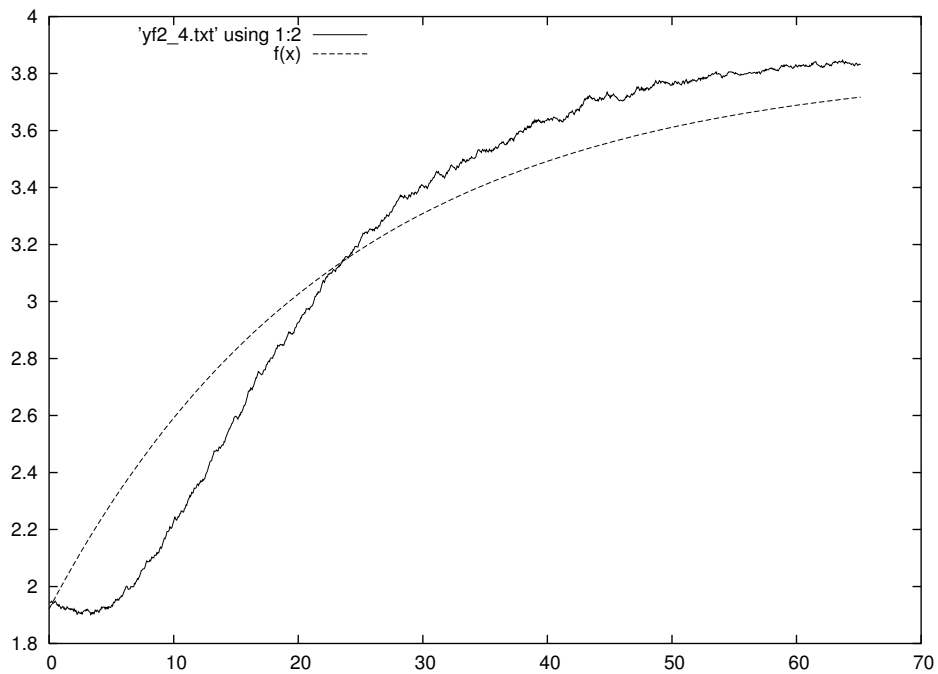


Figura 2.50: Ajuste de la respuesta ante escalón de 2 a 4 voltios del sistema de primer orden

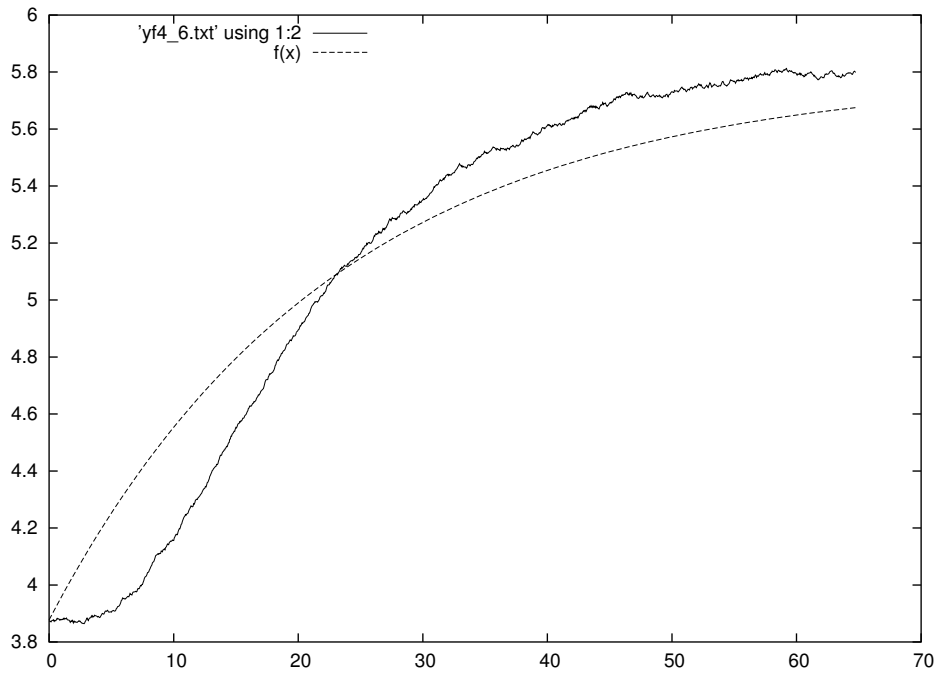


Figura 2.51: Ajuste de la respuesta ante escalón de 4 a 6 voltios del sistema de primer orden

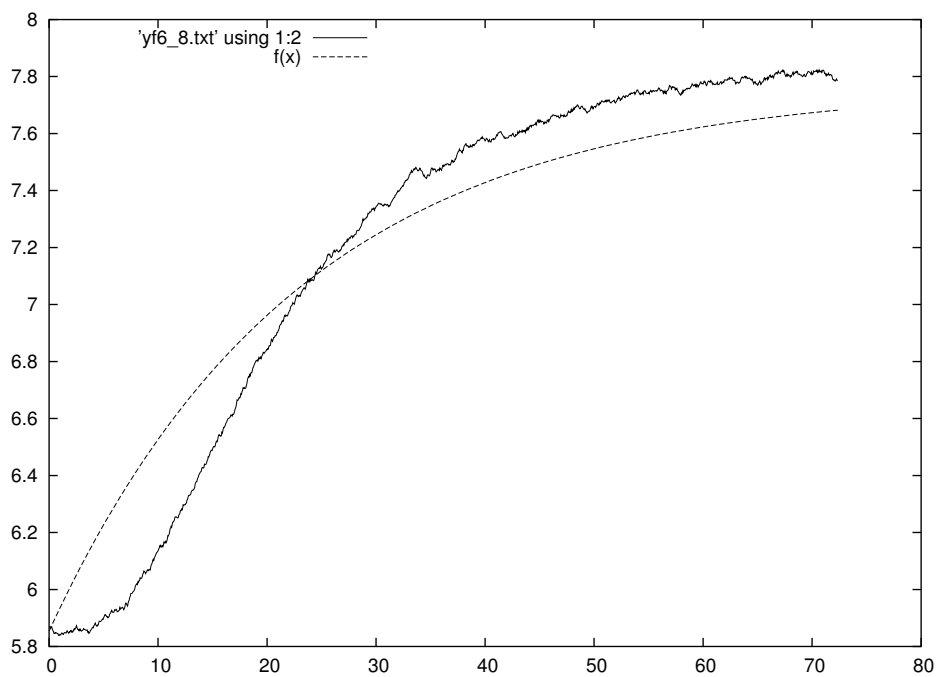


Figura 2.52: Ajuste de la respuesta ante escalón de 6 a 8 voltios del sistema de primer orden

Los valores estimados como más verosímiles para cada respuesta pueden compararse unos con otros al representarlos en la figura 2.53.

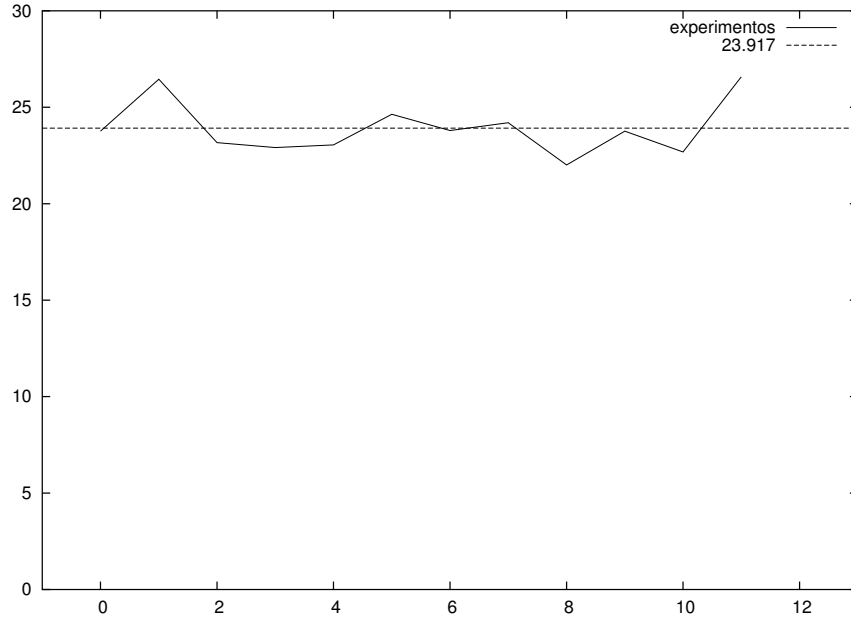


Figura 2.53: Valores de T para el modelo de primer orden

El valor final para la estimación de T será la media de los anteriores valores.

$$\hat{T} = \bar{T} = 23,917 \quad (2.74)$$

Ajuste a tercer orden

Dado que la aproximación de los sistemas de primer orden es bastante mala se ha decidido saltar hasta el tercer orden para intentar ajustar la dinámica adecuadamente. Se sigue la misma metodología para cada una de las respuestas que hemos obtenido de los experimentos.

La respuesta teórica de un sistema de tercer orden con todos sus polos reales distintos dos a dos se puede deducir de manera sencilla:

$$G(s) = \frac{k}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + T_3s)} = \left[\frac{A_1}{1 + T_1s} + \frac{A_2}{1 + T_2s} + \frac{A_3}{1 + T_3s} \right] \quad (2.75)$$

La ecuación que se obtiene de igualar los numeradores es la siguiente:

$$k = \sum_{i=1}^3 A_i \left[\prod_{j \neq i} (1 + T_j s) \right] \quad (2.76)$$

Esto se desarrolla en tres ecuaciones para los términos independiente, en s y en s^2

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= k \\ (T_2 + T_3)A_1 + (T_1 + T_3)A_2 + (T_1 + T_2)A_3 &= 0 \\ T_2T_3A_1 + T_1T_3A_2 + T_1T_2A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

El sistema de ecuaciones 2.77 puede expresarse de manera matricial como en la ecuación 2.78.

$$\mathbf{M} \cdot \vec{a} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ T_2 + T_3 & T_1 + T_3 & T_1 + T_2 \\ T_2 T_3 & T_1 T_3 & T_1 T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Para despejar la primera incógnita A_1 se opera por Kramer,

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & T_1 + T_3 & T_1 + T_2 \\ 0 & T_1 T_3 & T_1 T_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ T_2 + T_3 & T_1 + T_3 & T_1 + T_2 \\ T_2 T_3 & T_1 T_3 & T_1 T_2 \end{vmatrix}} = \frac{kT_1^2(T_2 - T_3)}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)(T_2 - T_3)} = \frac{kT_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \quad (2.79)$$

Por la simetría del problema se puede utilizar esta solución para generar las otras dos sin más que permutar los subíndices.

$$A_1 = \frac{kT_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \quad (2.80)$$

$$A_2 = \frac{kT_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} \quad (2.81)$$

$$A_3 = \frac{kT_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \quad (2.82)$$

La función de transferencia escrita en esta manera facilita la obtención de la respuesta ante escalón como suma de respuestas de sistemas de primer orden.

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \left[A_1 (1 - e^{-t/T_1}) + A_2 (1 - e^{-t/T_2}) + A_3 (1 - e^{-t/T_3}) \right] & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

Se vuelve a hacer uso de *fit* en *Gnuplot* para ajustar esta familia de funciones a cada una de las respuestas filtradas del sistema de tercer orden.

Notar por ejemplo que la respuesta ante escalón $4 \rightarrow 6$ a la que se quiere ajustar el modelo comienza por $u_o = 3,8775$ V que no corresponde con el valor que se encontró al analizar la estática y que debería ser $u_o = 3,90$ V ni tampoco con el que predice la regresión, que sería $u_o = -0,015 + 0,981545 \times 4,0 = 3,91118$ V. El motivo es que el método numérico tiende a compensar el error al cuadrado acumulado por las condiciones iniciales falsas que aparecen por los errores de repetibilidad con área de la curva de respuesta y esto enmascara el valor más verosímil de los parámetros, que resulta además ser *muy sensible a estas variaciones*. Para solucionar esto se ha tomado la media de las primeras 20 o 30 muestras de la señal para estimar el valor inicial, sacando esta variable del ajuste y haciendo así la identificación más certera.

Los valores que resultan se recogen en la tabla 2.9.

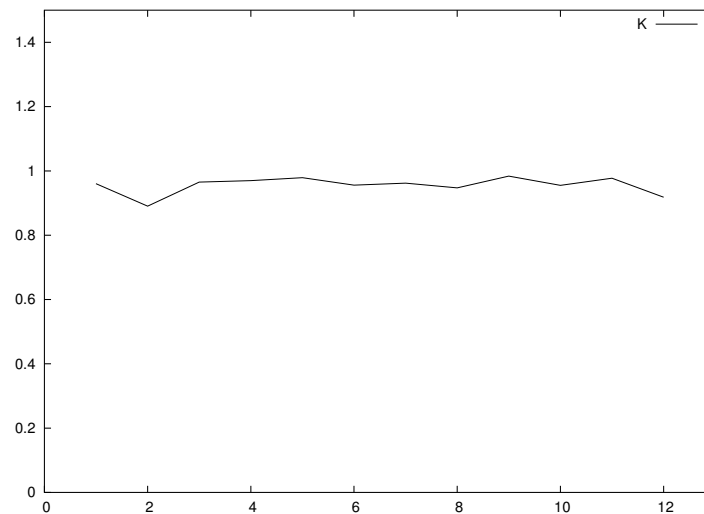
A continuación se obtienen los valores más verosímiles de la ganancia y los tres tiempos característicos teniendo en cuenta el conocimiento de la tabla 2.9.

Experimento	Estática	Estimación individual	k	T_1	T_2	T_3
$0 \Rightarrow 10$	0.07	0.1160	0.96022	5.09150	5.09770	13.02290
$0 \Rightarrow 2$	0.07	0.0964	0.89055	6.08450	6.10170	9.64100
$2 \Rightarrow 4$	1.89	1.9213	0.96540	5.42510	5.59360	11.32480
$4 \Rightarrow 6$	3.90	3.8775	0.96990	5.62800	5.82660	10.82310
$6 \Rightarrow 8$	5.87	5.8541	0.97895	5.52200	5.64770	11.82310
$8 \Rightarrow 10$	0.07	7.8397	0.95565	5.29730	5.40140	12.97720
$10 \Rightarrow 0$	7.86	9.7555	0.96194	5.20540	5.21250	12.90790
$10 \Rightarrow 8$	9.78	9.7716	0.94730	5.36540	5.50050	11.81660
$8 \Rightarrow 6$	7.86	7.8771	0.98400	5.31430	5.43900	11.57400
$6 \Rightarrow 4$	5.87	5.8566	0.95500	6.07370	6.27040	10.18270
$4 \Rightarrow 2$	3.90	3.9180	0.97745	5.03070	5.11420	12.79240
$2 \Rightarrow 0$	1.89	1.9368	0.91810	4.96550	5.06020	13.40480

Cuadro 2.9: Tabla de las estimaciones para los parámetros del sistema de tercer orden

- Para el primer conjunto de 12 estimaciones para la ganancia k se toma la media de ellos y así resulta una ganancia estática de valor

$$k = 0,95537 \quad (2.84)$$

Figura 2.54: Valores de k para el modelo de tercer orden

- Para el conjunto de 12 estimaciones del menor de los tiempos característicos, o lo que es lo mismo el polo real más alejado, su valor medio resulta

$$\hat{T}_1 = \bar{T}_1 = 5,4170 \quad (2.85)$$

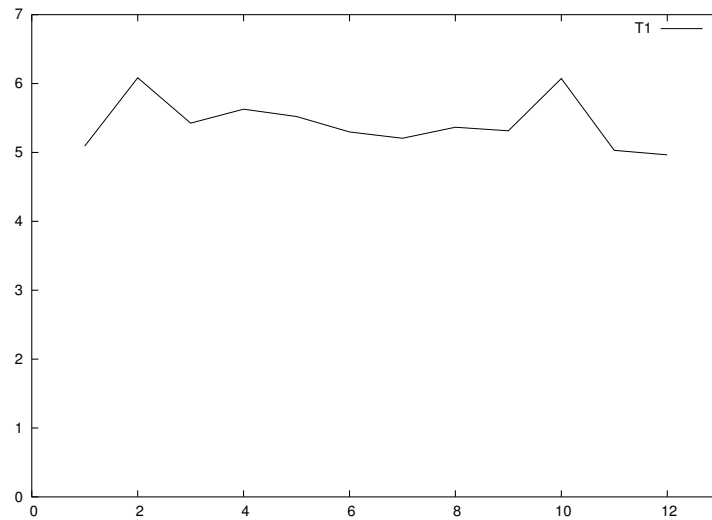


Figura 2.55: Valores de T_1 para el modelo de tercer orden

- El valor medio para el conjunto de 12 estimaciones del tiempo característico intermedio es

$$\hat{T}_2 = \bar{T}_2 = 5,5221 \quad (2.86)$$

Este polo está muy cerca del anterior por lo que parece que podría modelarse como un sistema críticamente amortiguado de tercer orden, en el que dos de los polos están a punto de pasar a ser complejos con lo que el sistema comenzaría a tener componentes oscilatorias (y no es el caso).

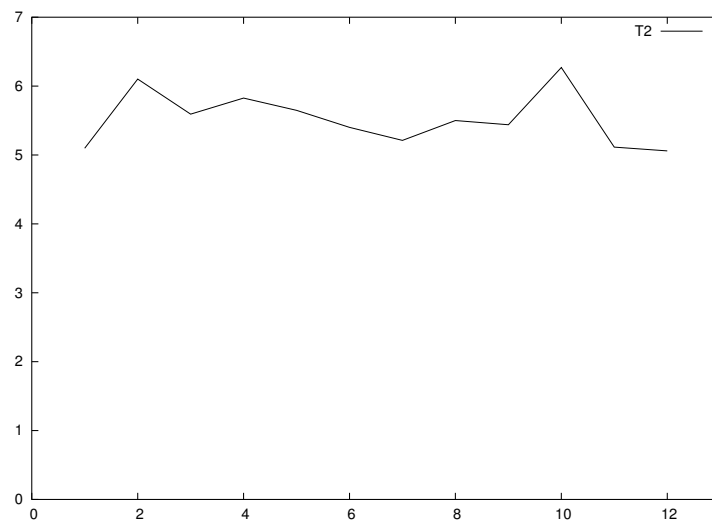


Figura 2.56: Valores de T_2 para el modelo de tercer orden

- Con las 12 estimaciones para el más lento de los polos reales del sistema, o lo que es lo mismo, el mayor tiempo característico de entre los sistemas de primer orden, se estima el valor más verosímil como la media de las estimaciones:

$$\hat{T}_3 = \bar{T}_3 = 11,857 \quad (2.87)$$

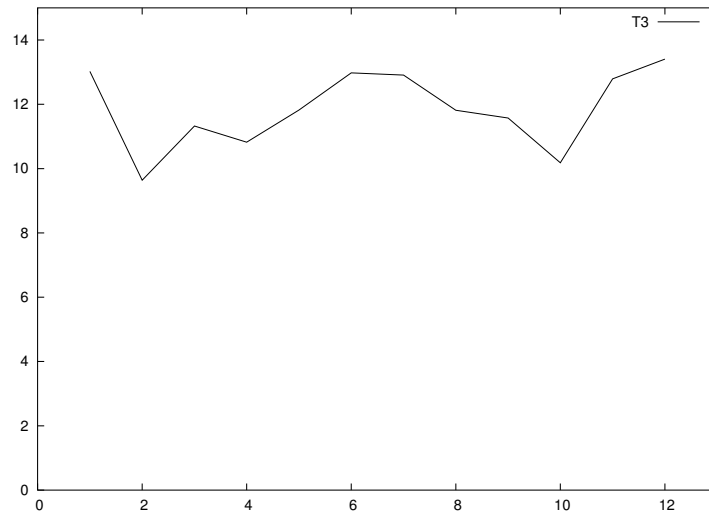


Figura 2.57: Valores de T_3 para el modelo de tercer orden

Se han utilizado estos parámetros para construir un simulador que recree el modelo lineal de tercer orden y se comparan sus respuestas con las de la maqueta ante los mismos escalones en la entrada. Como puede verse en las figuras siguientes las aproximaciones son *muy buenas* tanto en la dinámica como en el comportamiento en régimen permanente.

Este hecho complica en cierto modo el proyecto y es que tampoco tiene sentido emplear una maqueta con un comportamiento lineal para ensayar técnicas diseñadas para tratar con los problemas que presentan los sistemas no lineales.

Por otra parte, el modelo del sistema térmico *es tan fiel* que puede ser de utilidad para sintetizar un sistema no lineal usando alguna técnica para complicar la dinámica y hacerla así más interesante.

En los próximos apartados se explora esta posibilidad pero hay que tener en mente de manera continua que **buscamos un sistema con un comportamiento no lineal lo suficientemente fuerte como para que las aproximaciones lineales a su dinámica no sean de utilidad alguna.** En cuanto se consiga un sistema de esas características *se ignorará cómo se ha llegado hasta él y se tratará como un sistema no lineal desconocido.*

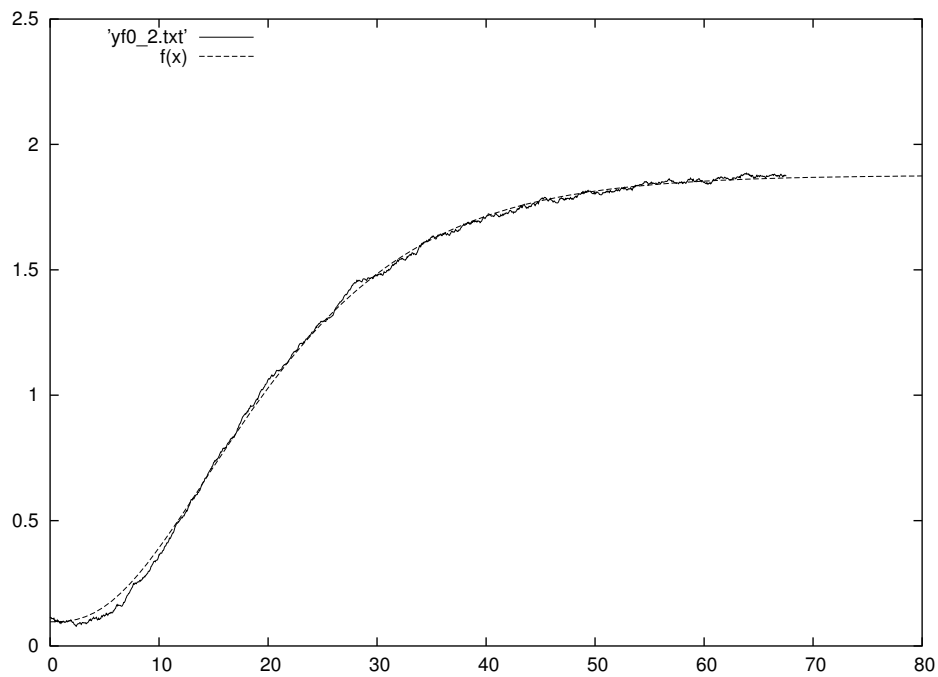


Figura 2.58: Escalón de 0 a 2 voltios en la entrada del sistema de tercer orden

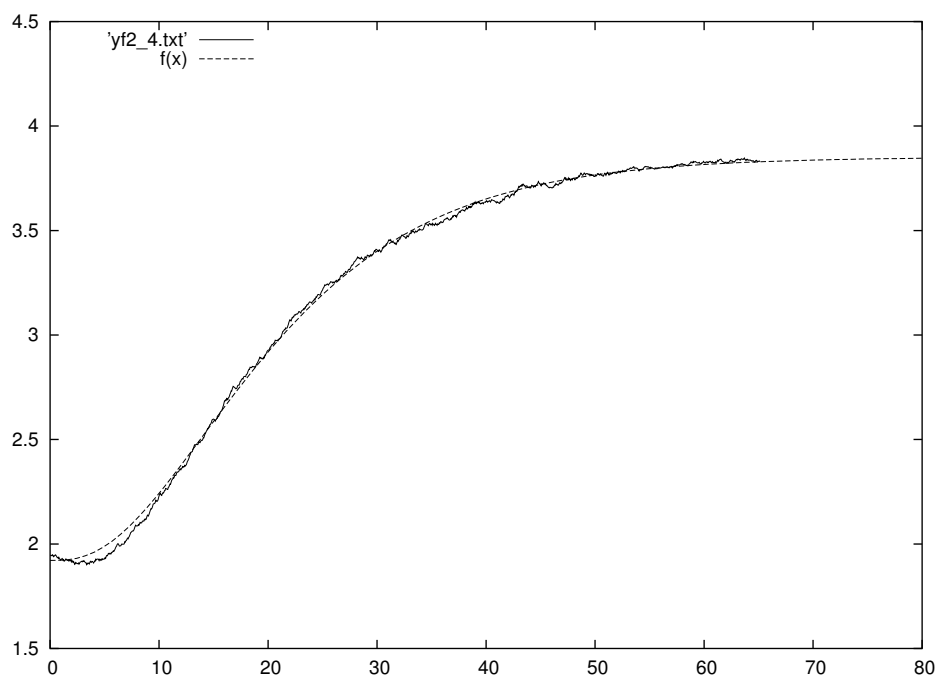


Figura 2.59: Escalón de 2 a 4 voltios en la entrada del sistema de tercer orden

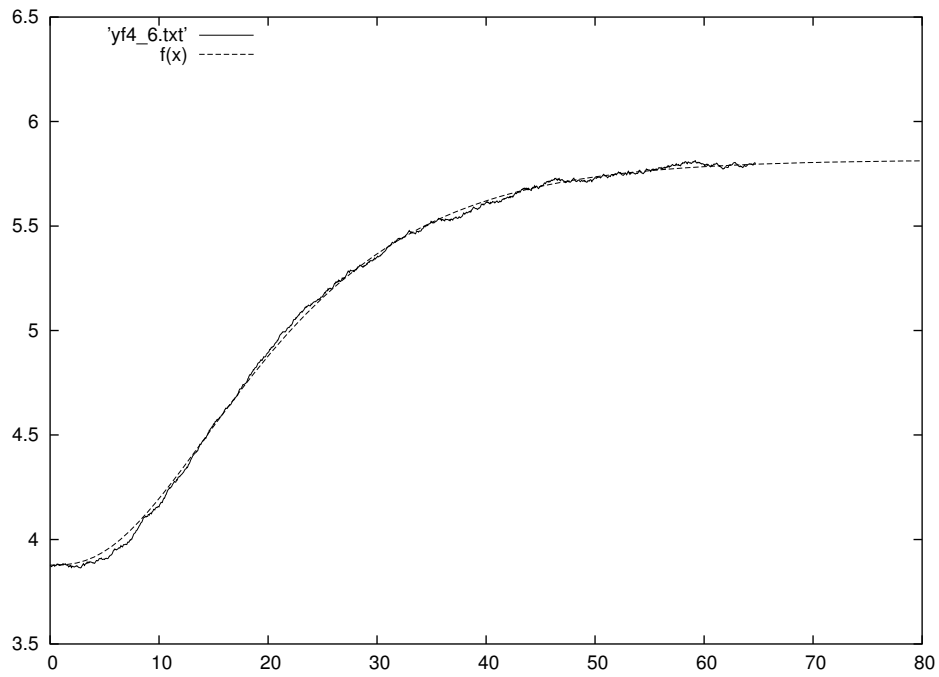


Figura 2.60: Escalón de 4 a 6 voltios en la entrada del sistema de tercer orden

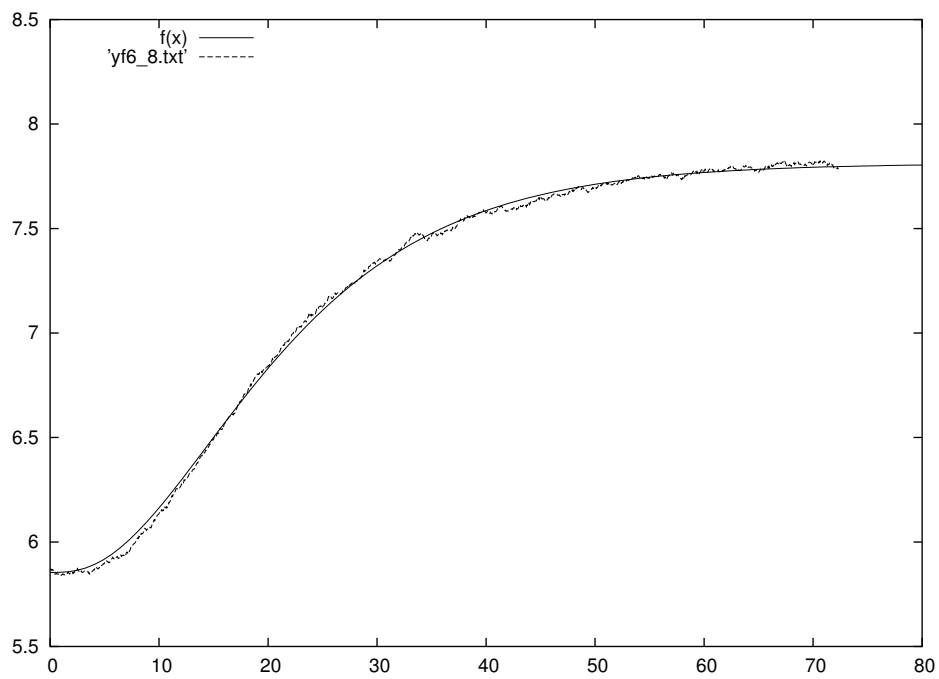


Figura 2.61: Escalón de 6 a 8 voltios en la entrada del sistema de tercer orden

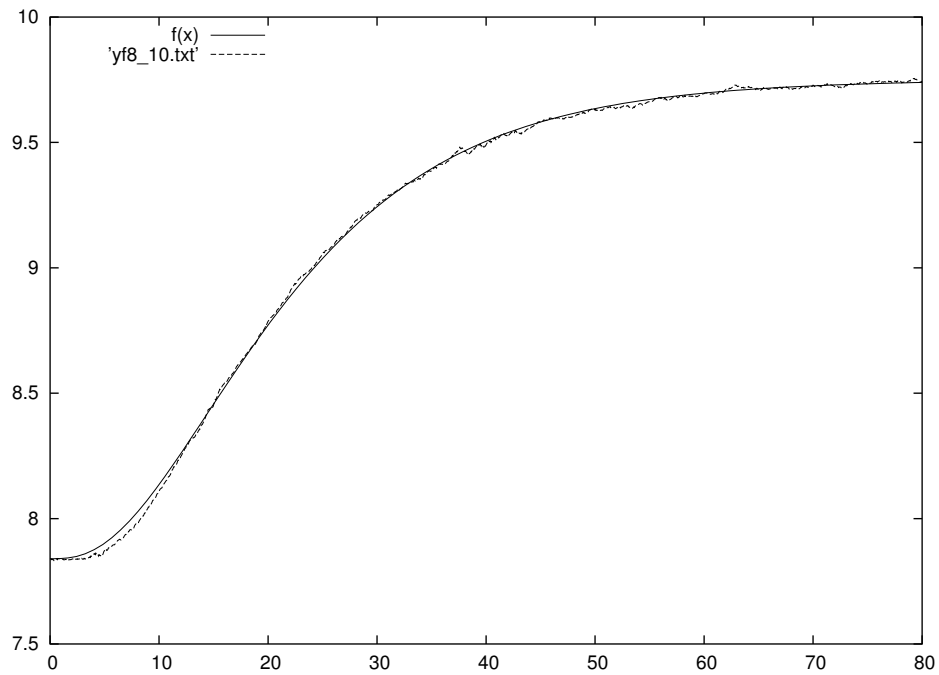


Figura 2.62: Escalón de 8 a 10 voltios en la entrada del sistema de tercer orden

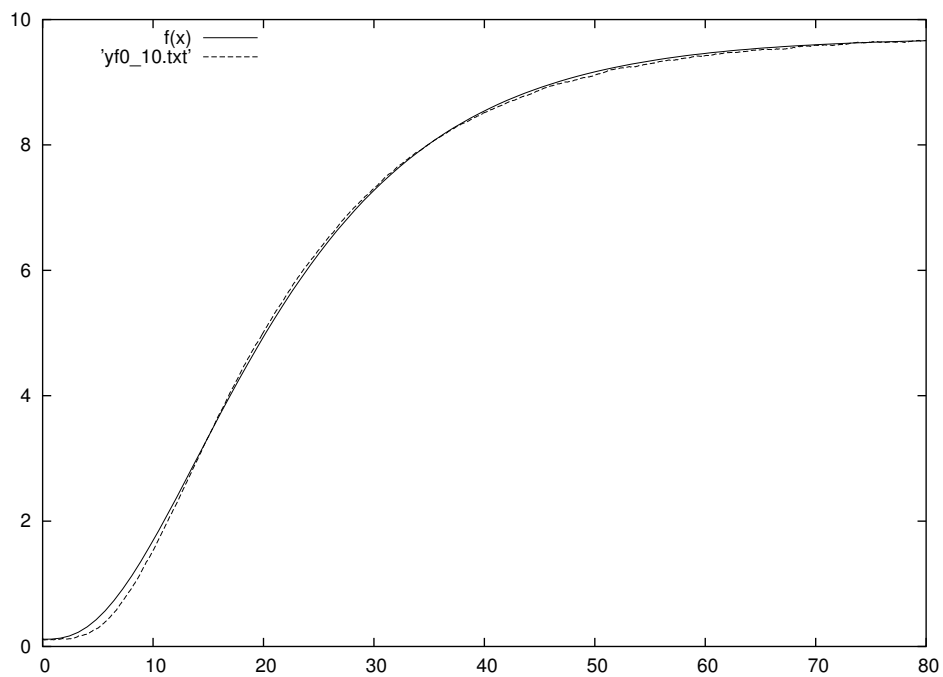


Figura 2.63: Escalón de 0 a 10 voltios en la entrada del sistema de tercer orden

2.2.3. Obtención de un sistema no lineal

Como se observó en la sección anterior la maqueta térmica se comporta como un sistema lineal de tercer orden, con lo que carece de sentido aplicar técnicas de modelado borroso pensadas para solucionar los problemas que presentan los sistemas no lineales.

Esta sección presenta los pasos a seguir para la obtención de un sistema con dinámica no lineal a partir del sistema físico antes identificado como tercer orden. El objetivo es encontrar una manera sencilla de obtener un comportamiento suficientemente no lineal.

Dos ideas pueden servir,

- Poner en serie un sistema no lineal de tipo saturación, tiempo muerto, ...
- Realimentar con una ganancia no lineal

La segunda opción es más atractiva ya que proporciona una no linealidad del tipo buscado para luego desarrollar el resto de los trabajos.

La realimentación no lineal debe realizarse teniendo en mente dos objetivos principales:

1. Mantener un rango amplio en la variable de salida (a ser posible 0-10 voltios). Esto es interesante porque la señal viene contaminada con ruido y el filtrado será más sencillo cuanto mayor sea el coeficiente *signal to noise ratio*(SNR). La amplitud del ruido no va a disminuir porque se hagan experimentos en un rango menor de la variable medida, así que hay que procurar mantener el mayor rango posible para disminuir el SNR en las señales.
2. Conseguir que la dinámica del sistema cambie lo más posible con el nivel de la variable de salida. Se busca esto porque hace al sistema interesante para los siguientes estudios. Cuanto más varíe la dinámica del sistema según nos movemos por las variables de estado, los métodos de modelado más sencillos se mostrarán peores y esto dará pie a introducir distintos modelos basados en lógica borrosa en orden de complejidad para obtener cada vez mejores resultados.

Más tarde se demuestra que estos objetivos son contrapuestos entre sí y no se podrá avanzar más hacia uno de ellos sin alejarnos del otro. Se tendrá que alcanzar entonces un compromiso entre mantener el rango amplio para la salida y hacer más interesante la dinámica.

Se propone un esquema de realimentación de la variable de salida del tipo ganancia k_f variable lineal (ver figura 2.64).

$$w = k_f(y)y, \quad k_f(y) = \lambda y, \quad w = \lambda y^2 \quad (2.88)$$

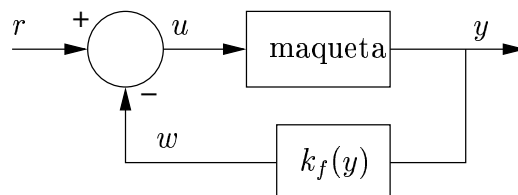


Figura 2.64: Realimentación no lineal

A continuación se estudia la dinámica y la estática de los sistemas realimentados de este modo. Se comienza analizando cómo influye este esquema de realimentación en sistemas lineales de primer orden y se encontrará que algunos resultados son generalizables a sistemas de cualquier orden, en particular a tercero.

Sistemas lineales de primer orden realimentados

Se parte de la ecuación diferencial para un sistema del tipo

$$T\dot{y} + y = k_e u \quad (2.89)$$

Puesto que al sistema no le llega la entrada r sino $u = r - w$ explicitamos esto en la ecuación anterior,

$$T\dot{y} + y = k_e(r - k_f(y)y) \quad (2.90)$$

Agrupando los términos en y en la parte izquierda de la ecuación

$$T\dot{y} + (1 + k_e k_f(y))y = k_e r \quad (2.91)$$

En la forma de la ecuación 2.89 quedaría

$$\frac{T}{1 + k_e k_f(y)}\dot{y} + y = \frac{k_e}{1 + k_e k_f(y)}r \quad (2.92)$$

La constante de tiempo T así como la ganancia k_e del sistema son ahora distintas y dependen de la variable de salida de esta manera

$$\tilde{T} = \frac{T}{1 + k_e k_f(y)} \quad (2.93)$$

$$\tilde{k}_e = \frac{k_e}{1 + k_e k_f(y)} \quad (2.94)$$

El valor de k_e es prácticamente igual a la unidad y con el esquema de realimentación que antes se propuso

$$k_f(y) = \lambda y$$

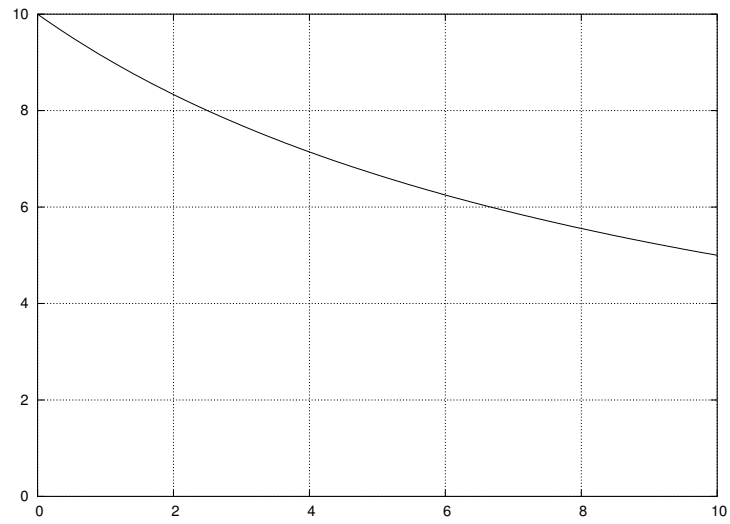
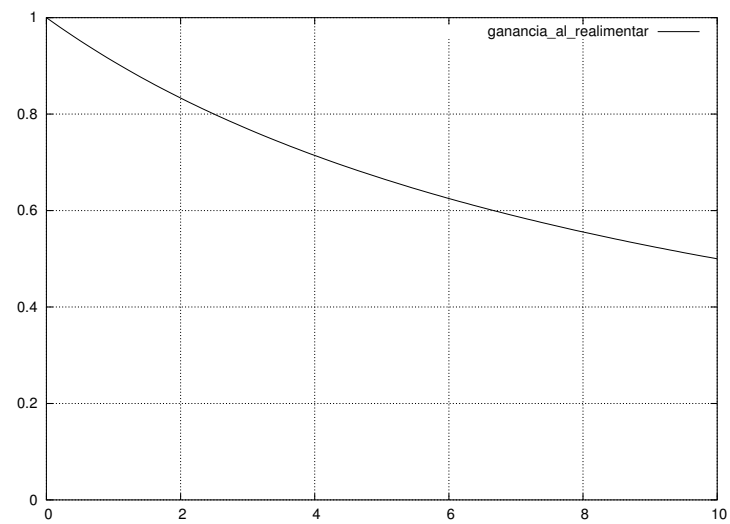
se tendría que

$$\tilde{T} = \frac{T}{1 + k_f(y)} = \frac{T}{1 + \lambda y} \quad (2.95)$$

Este sistema es ya no lineal y puede representarse la expresión 2.95 en la figura 2.65.

Si tenemos en cuenta que las señales con que se juega están normalizadas 0-10 voltios se puede elegir $\lambda = 1/10$ y de ese modo la cantidad de realimentación varía entre $k = 0$ cuando la variable de salida está cerca de 0 y $k = 1$ cuando se está en la parte alta de su rango posible.

Ocurriría lo mismo para la ganancia del sistema: el sistema en lazo abierto tiene una ganancia k_e prácticamente unitaria ($k_e = 0,9815 \approx 1$) y disminuye cuando se realimenta con la ganancia variable según nos alejamos de $y = 0$ hacia $y = 10$ voltios.

Figura 2.65: Constante de tiempo en función de y Figura 2.66: Ganancia en función de y

Sistemas lineales de orden superior realimentados

Notar que al generalizar a órdenes superiores se pierde el resultado sobre la forma en que varía la constante de tiempo en función de la cantidad de realimentación. No ocurre así con el resultado sobre la estática del sistema ya que no afecta el orden del sistema, como se procede a probar.

Tengamos una ecuación diferencial de orden n en la forma 2.96

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) + c \quad (2.96)$$

Pongamos que ante una cierta entrada constante $u(t) = u_c \quad t \geq 0$ el sistema es estable y evoluciona hacia el régimen permanente y_∞ . La ecuación anterior quedaría como en la ecuación 2.97.

$$y_\infty = b_0 u_c + c \quad (2.97)$$

Recuerdo que los valores de b_0 y c fueron estimados en la regresión que se realizó anteriormente y sus valores aproximados son los que se muestran:

$$b_0 = 1 \quad (2.98)$$

$$c = 0 \quad (2.99)$$

Luego la ecuación 2.97 resulta

$$y_\infty = u_c \quad (2.100)$$

Si, como antes se propuso, realimentamos con $u = r - w$ y a su vez $w = k_f(y)y$ entonces

$$y_\infty = r_c - k_f(y_\infty)y_\infty \quad (2.101)$$

$$[1 + k_f(y_\infty)]y_\infty = r_c \quad (2.102)$$

Esta importante ecuación dará el régimen permanente en la variable de salida ante el nivel de la entrada al sistema realimentado independientemente del modelo que utilicemos y de su orden.

Si se escoge una realimentación del tipo $k_f(y) = \lambda y$ particularizando para $\lambda = 1/10$ obtendremos la ecuación de segundo grado que se muestra en 2.103.

$$\left(1 + \frac{y_\infty}{10}\right) y_\infty = r_c \quad (2.103)$$

$$y_\infty + \frac{y_\infty^2}{10} = r_c \quad (2.104)$$

$$y_\infty^2 + 10y_\infty = 10r_c \quad (2.105)$$

La ecuación 2.105 valdrá para saber a qué queda reducido el rango de la variable de salida cuando se realimenta según este esquema. Supóngase en un primer momento que se mantiene la entrada al sistema realimentado constantemente en $r_c = 0$. Entonces la ecuación 2.105 se convierte en la ecuación 2.106.

$$y_\infty^2 + 10y_\infty = 0 \quad (2.106)$$

que tiene dos soluciones distintas,

$$y_\infty = -10 \quad (2.107)$$

$$y_\infty = 0 \quad (2.108)$$

Obviamente solo la segunda es válida y como era de esperar el sistema evoluciona cerca de $y = 0$ como lo haría sin realimentar, con $y_\infty = 0$.

Supóngase ahora que el sistema realimentado es excitado con $r_c = 10$ voltios. La ecuación 2.102 que liga el valor de y_∞ con r_c devuelve ahora el valor de y_∞ que se alcanza en el permanente.

$$y_\infty^2 + 10y_\infty - 100 = 0 \quad (2.109)$$

Tiene dos soluciones

$$y_\infty = 6,18034 \quad (2.110)$$

$$y_\infty = -16,1803 \quad (2.111)$$

En este caso la primera solución es la correcta. La relación entre el valor del régimen permanente de y (esto es y_∞) y la entrada al sistema realimentado se representa en la figura 2.67.

Puede compararse en la figura 2.68 la característica estática del sistema realimentado con la del sistema sin realimentar para ver el efecto que ha tenido la realimentación no lineal.

El primer objetivo planteado en la sección debe cumplirse para sistemas de tercer orden y la dinámica parece modificarse bastante en el caso de los sistemas de primer orden. Es difícil prever cómo afectará a sistemas de órdenes mayores, pero es posible simular este esquema de realimentación con el modelo lineal de tercer orden para la maqueta y observar si los objetivos se cumplen.

Este simulador se escribió en *Octave* y en la sección 2.2.5 se muestran sus predicciones junto con las señales obtenidas al implementar el esquema de realimentación no lineal.

Las previsiones obtenidas del simulador son que el sistema de tercer orden lineal pasará a ser *no lineal* y se comportará como *sobreamortiguado y lento* cerca de 0 voltios y *subamortiguado y rápido* en las cercanías del extremo superior del rango de la salida 6.18 voltios.

Esto es suficiente como para dar por bueno este esquema de realimentación y pasar en la siguiente sección a estudiar las posibles vías para implementarlo.

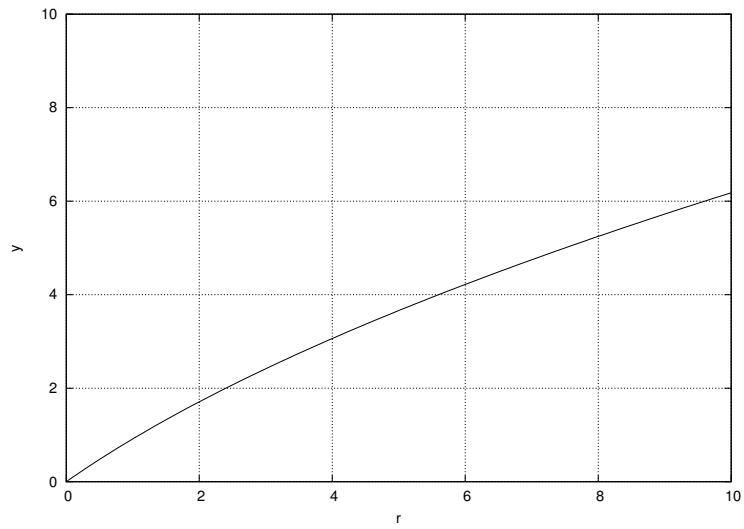


Figura 2.67: Característica estática del sistema realimentado

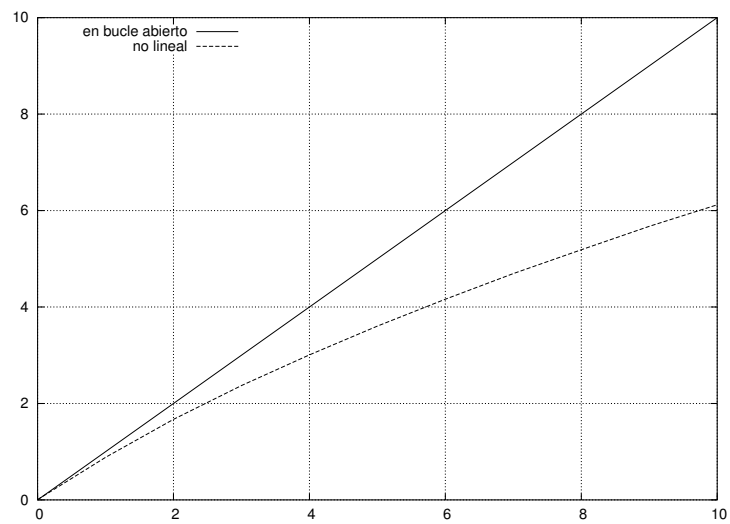


Figura 2.68: Comparación entre las características estáticas de los sistemas

2.2.4. Implementación de la no linealidad

La metodología para realimentar la maqueta que se expuso en el capítulo 2.2.3 se puede lograr mediante varias maneras: la primera de ellas podría ser un pequeño circuito electrónico que realizara las operaciones entre las señales y la segunda de ellas realizar las funciones por software.

Software

La realimentación no lineal se introdujo en la programación del driver para la tarjeta de adquisición de datos que se detalla en la sección A.2. Las modificaciones al programa necesarias para conseguir el esquema de realimentación se detallan en la sección A.3 del apéndice dedicado al software.

Electrónica

En el momento de realizar estas actividades no disponía de conocimientos suficientes en el área de la electrónica, así que aunque en su momento se optó por la implementación mediante software, al terminar el curso se acometió el diseño de una circuitería que implementase la función de transferencia de la figura 2.69 aunque no se llegó a montar.

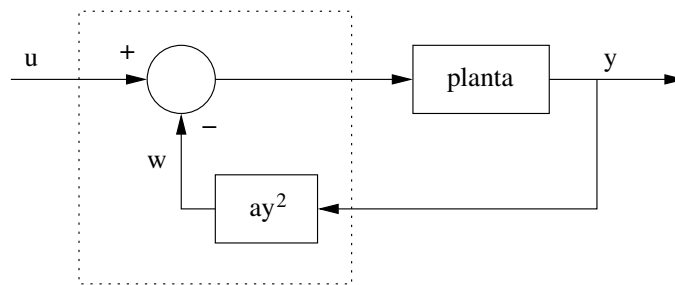


Figura 2.69: Esquema de bloques para la realimentación

A primera vista parece posible realizar el circuito con un único operacional y un integrado que realice la función de multiplicador. El esquemático se muestra en la figura 2.70.

Los cálculos para las resistencias son los siguientes:

$$u^+ = \frac{R_3}{R_2 + R_3} u \quad (2.112)$$

La realimentación negativa implica que $u^+ = u^-$,

$$\frac{y^2/10 - u^+}{R_1} = \frac{u^+ - u_0}{R_0} \quad (2.113)$$

Despejando lo que acompaña a u_0 a la izquierda,

$$\frac{u_0}{R_0} = -\frac{u_1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \right) u^+ - \frac{y^2/10}{R_1} \quad (2.114)$$

Sustituyendo la expresión 2.112 en la expresión 2.114,

$$\frac{u_0}{R_0} = \frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1} \frac{R_3}{R_2 + R_3} u - \frac{1}{R_1} y^2 / 10 \quad (2.115)$$

De la expresión 2.115 se obtiene que, si deseamos una relación como

$$u_0 = u - ay^2 \quad (2.116)$$

se deducen las siguientes dos ecuaciones:

$$1 = \frac{R_0 + R_1}{R_1} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (2.117)$$

$$a = \frac{R_0}{R_1} \quad (2.118)$$

Para ajustar a de manera libre se podría utilizar un potenciómetro bien para R_0 o para R_1 , pero esto desajusta la ganancia del término que acompaña a u en la función de transferencia parcial u_0/u . Visto que no es posible ajustar la variable a independientemente de la ganancia del sumador será necesario utilizar dos operacionales y hacer una pequeña modificación en el esquema de bloques 2.69 para adaptarlo a una función de transferencia realizable electrónicamente. La solución es desacoplar el ajuste de a de la etapa de salida para no modificar la ganancia global al tocar el potenciómetro (ver figura 2.71).

Se necesitarán dos operacionales: el primero de ellos para invertir la señal $y^2/10$ y multiplicarla por el parámetro a ajustable mediante un potenciómetro, el segundo de ellos para sumar la señal resultante de la etapa anterior con la tensión de referencia, en estructura no-inversora. El esquemático del diseño electrónico se muestra en la figura 2.72

Las ecuaciones para la selección de componentes son las siguientes:

$$w = -\frac{R_2}{R_1} y^2 / 10 = -ay^2 \quad (2.119)$$

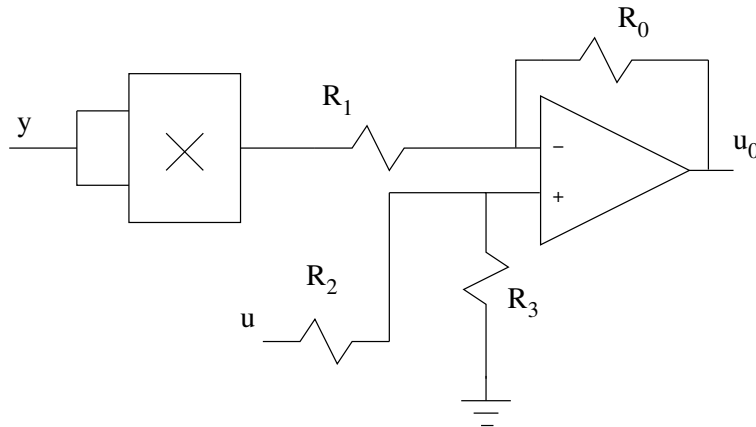


Figura 2.70: Esquemático del circuito electrónico

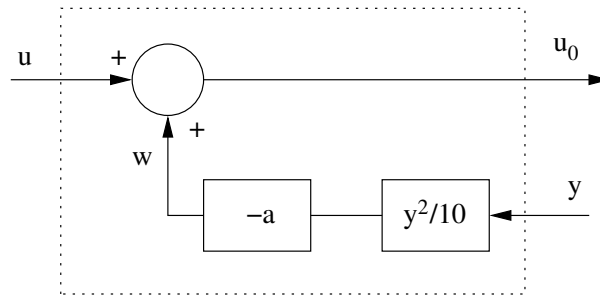


Figura 2.71: Nuevo esquema de bloques para la realimentación

Esto conduce a un criterio de diseño para R_1 y R_2 ,

$$a = \frac{R_2}{10R_1} \quad (2.120)$$

La función de transferencia global es sencilla de encontrar,

$$u_0 = \frac{R_a + R_b}{R_a} \left(\frac{\frac{w}{R_3} + \frac{u}{R_4}}{\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \right) \quad (2.121)$$

Si utilizamos $R_3 = R_4 = R_p$ la ecuación 2.121 se reduce a

$$u_0 = \frac{R_a + R_b}{R_a} \frac{w + u}{3} \quad (2.122)$$

Como criterio de diseño puede utilizarse la relación 2.123

$$R_b = 2R_a \quad (2.123)$$

Y la ecuación 2.122 finalmente toma la forma de la ecuación 2.116.

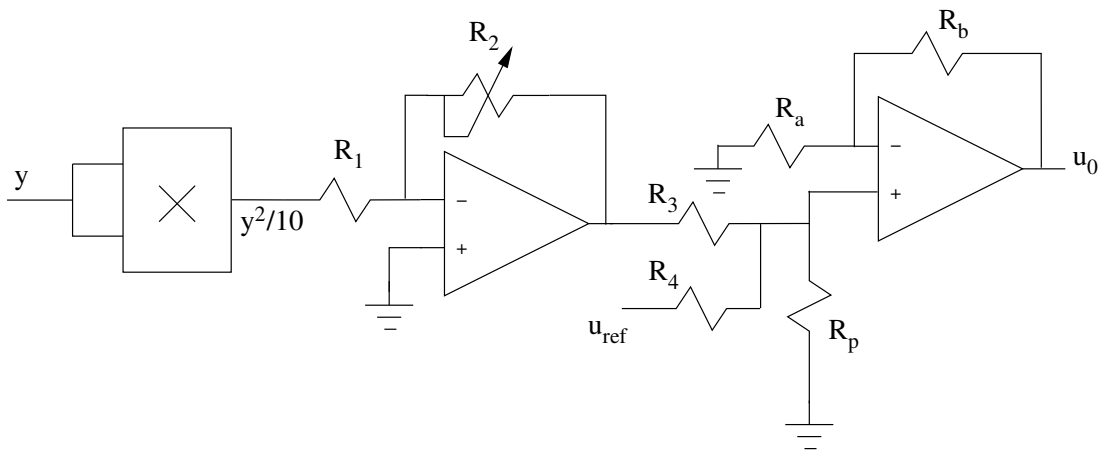


Figura 2.72: Modificación del circuito electrónico

2.2.5. Dinámica del sistema realimentado

Una vez implementada la realimentación no lineal pasamos ahora a estudiar mediante experimentación la dinámica del nuevo sistema. De este modo se comprobará si las previsiones teóricas y las arrojadas por los simuladores fueron correctas y, en efecto, el sistema presenta dinámica no lineal.

En las figuras 2.73 y 2.74 se muestran las respuestas ante escalón del sistema realimentado. En la primera el sistema se excitó con un escalón en la entrada desde 0 hasta 10 voltios, mientras que la segunda muestra la respuesta del sistema ante el escalón en sentido inverso. Las señales originales se muestran como nubes de puntos y en línea de trazos la señal filtrada en este caso mediante *un filtro Butterworth de segundo orden* programado en *Octave* con frecuencia de corte parametrizable.

Lo que hacemos notar en las señales es en primer lugar que el carácter *subamortiguado* de la respuesta “hacia arriba” se convierte en *sobreamortiguado* cuando es excita “hacia abajo” (como se anticipó en 2.2.2).

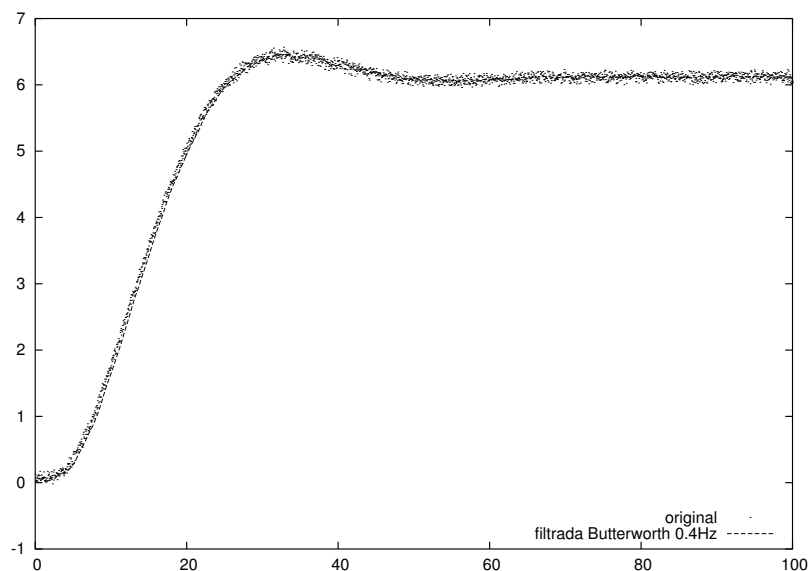


Figura 2.73: Dinámica del sistema realimentado ante escalón de 0 a 10 voltios

Para caracterizar al sistema no lineal en los extremos del rango de la variable de salida se realiza un experimento en cada extremo del rango de la variable de salida (figuras 2.75 y 2.76) y se estudian para ajustar sendos modelos lineales de segundo orden aproximantes. Estos dos sistemas lineales servirán más tarde como base para sintetizar varios modelos borrosos.

Podemos comparar la dinámica de las dos respuestas mostradas en las figuras 2.75 y 2.76 para observar si las características de la respuesta en el tiempo son suficientemente distintas.

- No tienen la misma ganancia
- No tienen el mismo tiempo de establecimiento
- Uno sobreoscila y el otro no

En la figura 2.77 se observa la diferencia entre las respuestas a escalón unitario del sistema en los dos puntos de trabajo al superponer una señal a la otra.

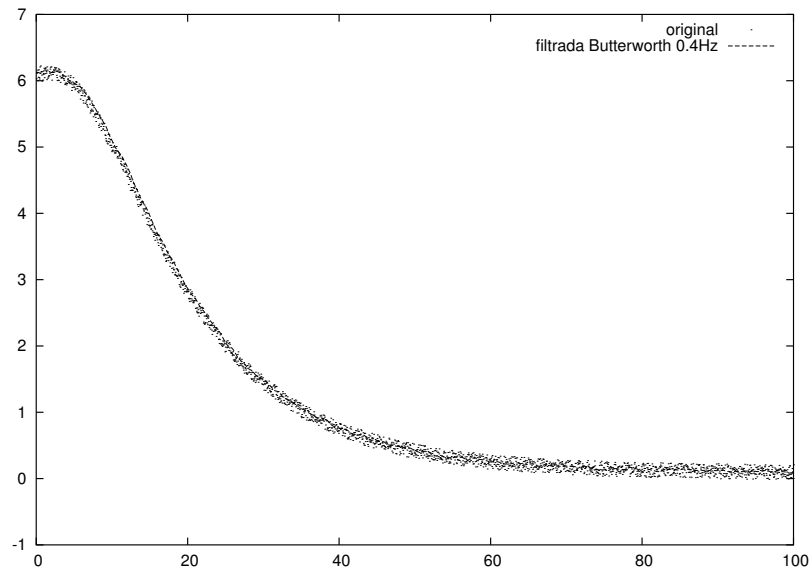


Figura 2.74: Dinámica del sistema realimentado ante escalón de 10 a 0 voltios

2.2.6. Simulador de la realimentación

En la sección 2.2.3 se argumentó a favor de la realimentación no lineal como método para solucionar el problema planteado por la linealidad de la maqueta y se mencionó la construcción de un simulador en *Octave* que predecía que al realimentar el sistema de tercer orden extraído en la sección 2.2.2 se conseguiría una dinámica suficientemente no lineal.

En esta sección se muestran los resultados que arrojaba el simulador y se comparan con los señales que se pueden extraer de la maqueta una vez implementada la realimentación.

En las figuras 2.78, 2.79 y 2.80 se muestran las simulaciones junto con las señales correspondientes a excitar el sistema con los siguientes escalones en la entrada:

- $0 \Rightarrow 10$
- $0 \Rightarrow 1$
- $9 \Rightarrow 10$

Como puede observarse el éxito es total: el sistema físico se comporta al realimentarlo de la manera esperada por los estudios teóricos y el simulador.

Esto significa que hasta este punto no se han cometido errores en el diseño del lazo de realimentación por software, que el modelo de la maqueta es muy bueno y que los resultados de la sección sobre el estudio teórico de la realimentación son correctos.

Llegado a este punto puede el lector olvidarse de todo lo dicho hasta ahora y comenzar a leer de aquí en adelante *como si de un nuevo sistema se tratara* ya que no se hará uso del conocimiento hasta ahora atesorado.

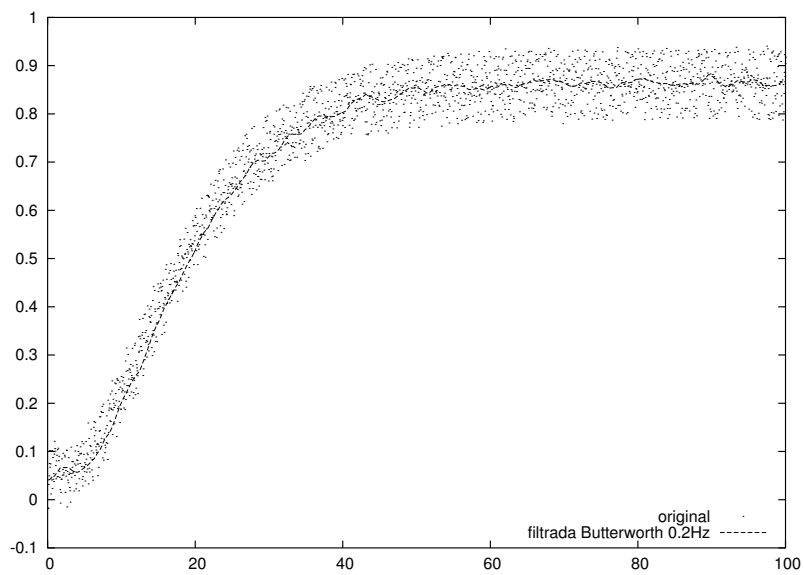


Figura 2.75: Dinámica del sistema realimentado ante escalón de 0 a 1 voltios

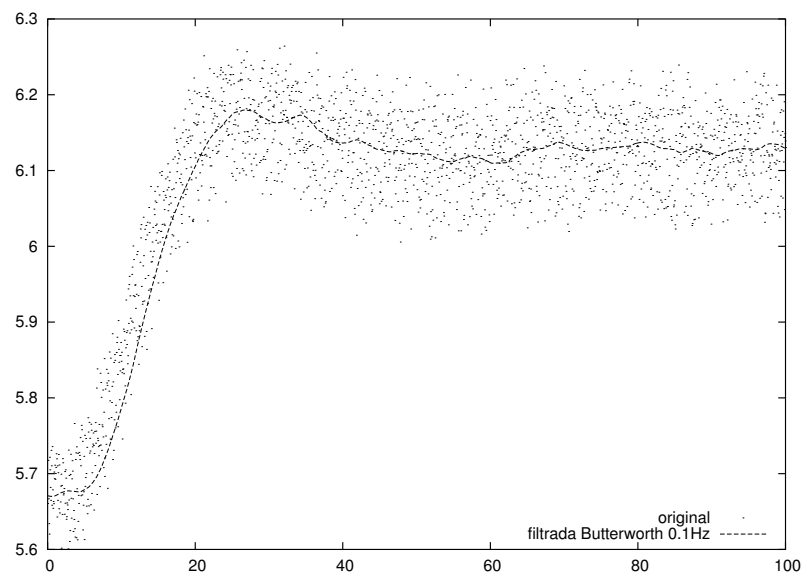


Figura 2.76: Dinámica del sistema realimentado ante escalón de 9 a 10 voltios

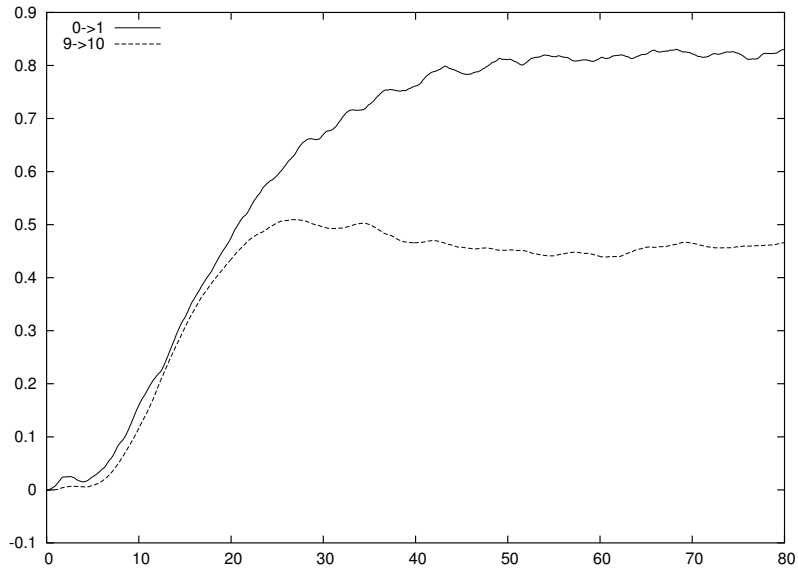
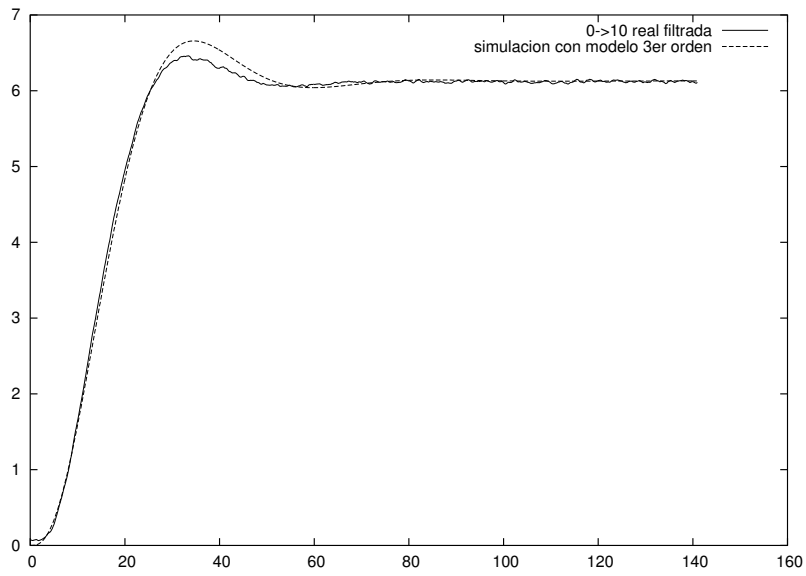
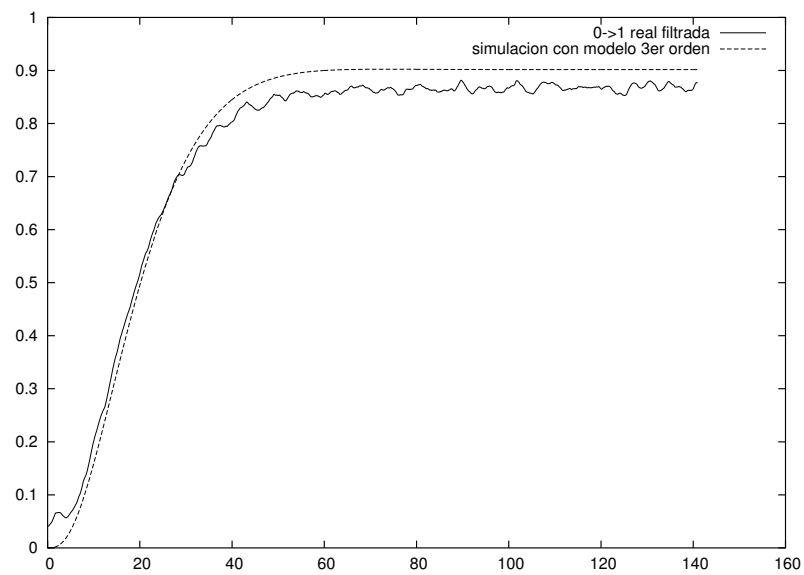
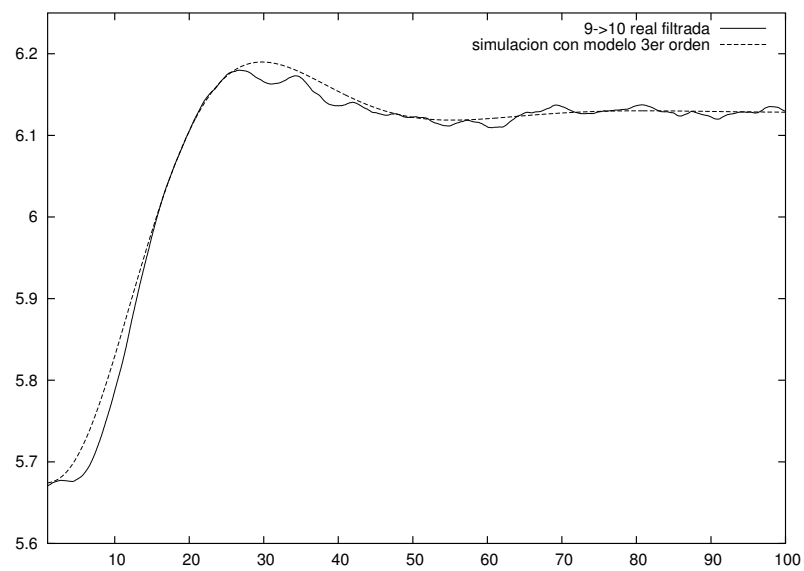


Figura 2.77: Comparación de las características estáticas y dinámicas de los modelos

Figura 2.78: Comparación de la respuesta ante escalón $0 \Rightarrow 10$

Figura 2.79: Comparación de la respuesta ante escalón $0 \Rightarrow 1$ Figura 2.80: Comparación de la respuesta ante escalón $9 \Rightarrow 10$

2.2.7. Identificación de modelos lineales

Se trata a continuación de extraer dos modelos lineales que ajusten la dinámica del sistema realimentado en ambos extremos de la variable de salida.

Modelo alrededor de $r = 0$

Alrededor de 0 voltios se observa en la figura 2.78 que la respuesta de la maqueta es sobreamortiguada, con lo que se intentará hacer una identificación a un modelo de segundo orden sobreamortiguado.

$$G(s) = \frac{k}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (2.124)$$

con respuesta en el tiempo ante escalón unitario

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{k}{T_1 - T_2} \left[T_1 (1 - e^{-t/T_1}) + T_2 (1 - e^{-t/T_2}) \right] & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.125)$$

Haciendo el ajuste en *Gnuplot* mediante *fit* se obtienen los siguientes valores para los parámetros como aquellos que minimizan la distancia entre la respuesta real y la del modelo:

$$k = 0,8150 \quad (2.126)$$

$$T_1 = 10,44 \quad (2.127)$$

$$T_2 = 10,59 \quad (2.128)$$

El resultado del ajuste puede observarse en la figura 2.81

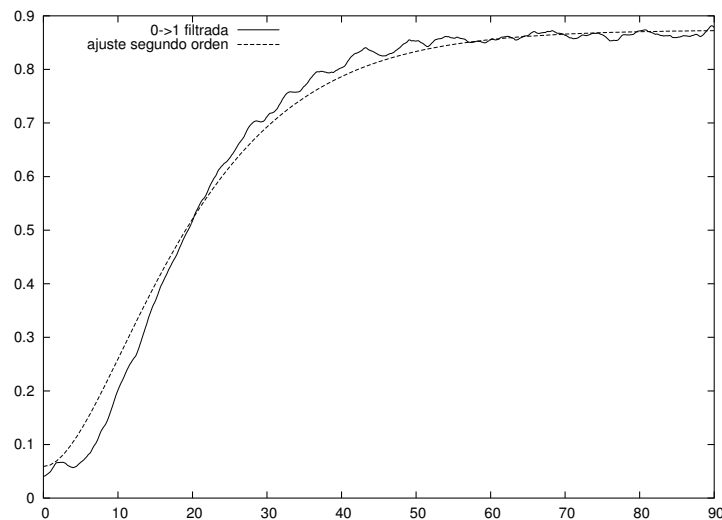


Figura 2.81: Identificación lineal entono a $r = 0$

Modelo alrededor de $r = 10$

Se estudia aquí la respuesta del sistema alrededor del valor de la salida que se alcanza al poner en la entrada $r = 10$. Vamos a realizar un ajuste de un sistema de segundo orden subamortiguado a la respuesta de la maqueta, ya que según se observa en la figura 2.80 la señal sobreoscila.

Partiendo de la función de transferencia

$$G(s) = \frac{k w_n^2}{s^2 + 2w_n \zeta s + w_n^2} \quad (2.129)$$

con respuesta en el tiempo ante escalón unitario

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ k \left[1 - \frac{e^{-\zeta w_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\sqrt{1-\zeta^2} + \arccos \zeta \right) \right] & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.130)$$

En *Gnuplot* ajustamos la respuesta a la anterior forma dejando variar k , ζ y w_n y se obtienen los siguientes valores para los parámetros como los que minimizan la distancia entre la respuesta real y la del modelo:

$$k = 0,4518 \quad (2.131)$$

$$\zeta = 0,5593 \quad (2.132)$$

$$w_n = 0,1139 \quad (2.133)$$

El resultado del ajuste puede observarse en la figura 2.82

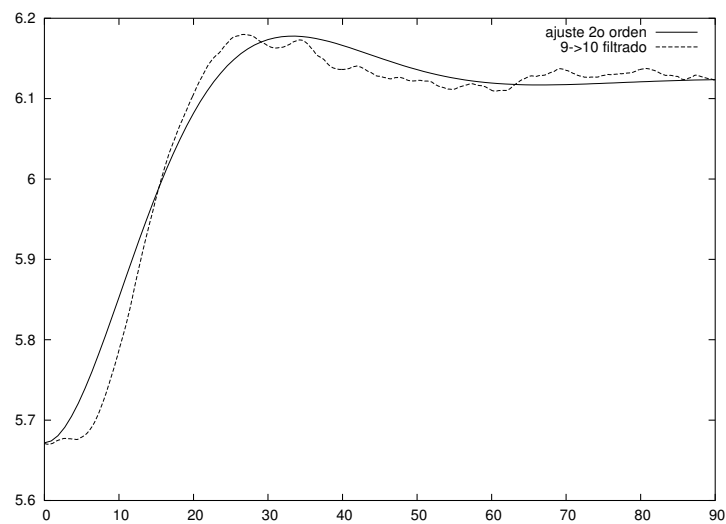


Figura 2.82: Identificación lineal entornu a $r = 10$

2.2.8. Modelos en variables de estado

Es conveniente representar los dos sistemas obtenidos en la sección 2.2.7 en el espacio de estados para poderlos tratar de igual modo y facilitar la labor de programación de los simuladores.

- Entorno a $y = 0$ el sistema sobreamortiguado

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)} \quad (2.134)$$

los parámetros más verosímiles resultaron

$$k = 0,8150 \quad (2.135)$$

$$T_1 = 10,44 \quad (2.136)$$

$$T_2 = 10,59 \quad (2.137)$$

La representación en variables de estado del sistema podría ser la siguiente,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \mathbf{B}_1(u - u_1) \quad (2.138)$$

Recordar que los valores del estado x_1 y de la entrada u_1 de los que se parte son los siguientes:

$$x_1 = 0 \quad (2.139)$$

$$u_1 = 0 \quad (2.140)$$

Seleccionando la salida y su derivada como variables de estado se tienen los valores para las matrices \mathbf{A}_1 y \mathbf{B}_1 que se muestran en las ecuaciones 2.141 y 2.142.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1T_2} & -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} \end{pmatrix} \quad (2.141)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_1T_2} \end{pmatrix} \quad (2.142)$$

Los valores concretos se muestran en las ecuaciones 2.143 y 2.144.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,0090 & -0,1902 \end{pmatrix} \quad (2.143)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0074 \end{pmatrix} \quad (2.144)$$

- La respuesta entorno al límite superior del rango de la variable de salida ha sido ajustada anteriormente a una respuesta ante escalón de un sistema de segundo orden subamortiguado,

$$G(s) = \frac{k w_n^2}{s^2 + 2w_n \zeta s + w_n^2} \quad (2.145)$$

Los valores más verosímiles para los parámetros resultaron ser

$$k = 0,4518 \quad (2.146)$$

$$\zeta = 0,5593 \quad (2.147)$$

$$w_n = 0,1139 \quad (2.148)$$

Si expresamos la dinámica en el espacio de estados con la misma selección de variables de estado se tienen las siguientes matrices

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}_2(u - u_2) \quad (2.149)$$

Recordar que los valores del estado x_2 y de la entrada u_2 de los que se parte son los siguientes:

$$x_1 = 6,18 \quad (2.150)$$

$$u_1 = 10 \quad (2.151)$$

Las matrices resultantes se muestran en las ecuaciones 2.152 y 2.153.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\zeta w_n \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ k w_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.153)$$

En 2.154 y 2.155 se muestran los valores concretos de las matrices.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,0130 & -0,1274 \end{pmatrix} \quad (2.154)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0059 \end{pmatrix} \quad (2.155)$$

2.3. Conclusiones

2.3.1. Sistema hidráulico

- Se ha presentado en primer lugar el sistema hidráulico y se ha optado por utilizar el conocimiento teórico que brinda la mecánica de fluidos sobre el comportamiento de la variable de salida (altura del depósito).
- Se dio un modelo satisfactorio de la bomba como un sistema lineal de primer orden con retardo, zona muerta y saturación. Los modelos de segundo orden y las aproximaciones de Padé no proporcionaron buenos resultados.
- Al no tener conocimiento de los valores de los parámetros que intervienen en la ecuación diferencial que modela el depósito se han tenido que realizar experimentos para obtener medidas indirectas de estos parámetros.
- Los parámetros de la ecuación diferencial se agruparon convenientemente para reducir el número de incógnitas a estimar mediante experimentación.
- Las estimaciones de los parámetros que se destilan de los experimentos se usaron para programar un simulador y se observó que el modelo basado en ecuaciones diferenciales no se ajusta a la dinámica del sistema real.
- Aprovechando que el sistema “depósito” es de primer orden se construyó un método numérico para inferir su dinámica en situaciones de vaciado libre. Este modelo proporciona un mejor ajuste a los datos observados.
- El método numérico mostró que *la dinámica del sistema depósito es afín*.
- El conjunto “bomba + depósito” es básicamente un sistema lineal salvo por una serie de no linealidades “duras”: un retardo en el tiempo, una zona muerta, y saturaciones. Se cierra entonces el estudio de esta maqueta porque no resulta apropiada para aplicar métodos de modelado borroso.

2.3.2. Sistema térmico

- Se ha estudiado el sistema térmico y se logrado componer un modelo lineal de tercer orden que representa fielmente a la maqueta.
- Ante la necesidad de modificar su dinámica para convertir al sistema en no-lineal se optó por implementar mediante software una realimentación no lineal a través del driver de la tarjeta de adquisición de datos. Se realizó la modificación del controlador de manera transparente para las aplicaciones.
- Por medio del estudio de las ecuaciones diferenciales se obtuvo un resultado que predijo la característica estática del sistema realimentado.
- Se programó un simulador que aplicaba el esquema de realimentación no lineal diseñado al modelo lineal de tercer orden.

- Se realizaron experimentos con el nuevo sistema y se comprobaron ciertas tanto las predicciones extraídas del estudio de las ecuaciones diferenciales como del simulador programado para la ocasión.
- El sistema no lineal se identificó mediante experimentos en los extremos del rango de la variable de salida y se ofreció la representación de ambos modelos en el espacio de estados.

Como consecuencia final, se está en este momento en condiciones de afrontar el modelado borroso del sistema no lineal basado en la maqueta térmica transformada.

Capítulo 3

Modelado Borroso del Sistema Térmico

El objetivo del capítulo 3 es confeccionar distintos modelos borrosos y realizar un análisis dinámico comparativo entre el sistema no lineal, los sistemas lineales aproximantes y varios tipos de sistemas borrosos a través de simuladores que se escribirán para la ocasión.

Se verá en la sección 3.1 que de forma teórica se pueden anticipar características de la dinámica y de la estática para sistemas dinámicos de primer orden.

En la sección 3.2 se confeccionan los modelos borrosos para el sistema obtenido en las últimas secciones del capítulo 2. Se escriben los simuladores para los distintos sistemas y se comparan las características de las respuestas de los distintos modelos con las respuestas reales.

Finalmente la sección 3.3 se conduce de manera análoga a la sección 3.1 pero para sistemas de segundo orden con la dificultad añadida de que no es posible una representación plana. Se hace uso entonces de herramientas infográficas para ayudarnos en la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales de los modelos.

3.1. Explicación de la dinámica de los sistemas borrosos

El objetivo de este apartado es justificar las diferencias entre la dinámica de los sistemas no lineales y la dinámica de sus sistemas aproximantes lineales y borrosos mediante argumentos geométricos sobre la forma de las ecuaciones diferenciales.

Los razonamientos se realizan para un sistema de tipo mecánico de primer orden y se cierra la sección con un ejemplo numérico para ilustrar los resultados.

Aunque se tratan únicamente aquellos sistemas dinámicos continuos de primer orden de la forma

$$\dot{x} = f(x) + ku \quad (3.1)$$

con f función de x y actuando u sobre la dinámica de forma lineal, los resultados concernientes a las características estáticas pueden extrapolarse a órdenes superiores.

Para cada modelo obtenido del sistema no lineal se comparan los siguientes puntos de sus respuestas ante escalón,

- la precisión del valor de régimen permanente
- la rapidez del sistema
- el carácter oscilante de la respuesta

3.1.1. Sistema mecánico teórico

Tengamos un móvil de masa m que avanza en un medio con rozamiento viscoso k mediante una fuerza f ,

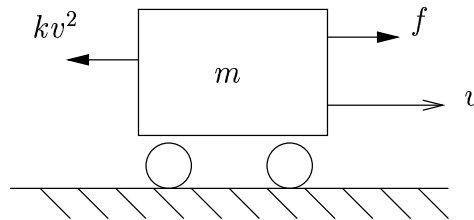


Figura 3.1: Sistema mecánico teórico

La ecuación diferencial que representa la dinámica del sistema es la siguiente,

$$m\ddot{x} = f - kv^2 \quad (3.2)$$

Si se plantea en velocidades mediante una integral primera se llega a la expresión 3.3.

$$m\dot{v} = f - kv^2 \rightarrow \dot{v} = \frac{f}{m} - \frac{k}{m}v^2 \quad (3.3)$$

La ecuación diferencial 3.3 es fácil de integrar pero se seguirán métodos generales de ahora en adelante pensando en que la solución no se puede obtener analíticamente en todos los casos. Si se dibujan las trayectorias del estado en el plano de fases (ver figura 3.2) se puede adelantar alguna propiedad de las soluciones de esta ecuación diferencial.

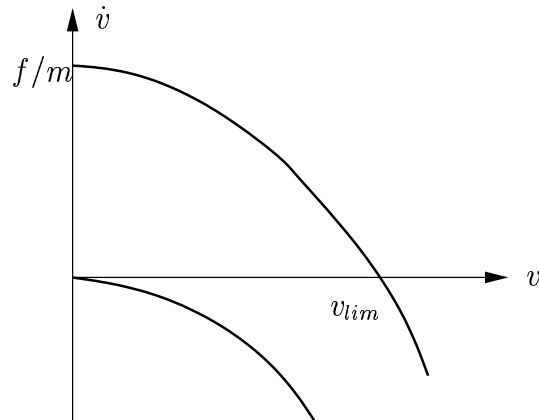


Figura 3.2: Representación de la EDO en el plano de fases

La *velocidad límite* es el valor al que tiende la velocidad para un valor concreto de la fuerza f cuando transcurre el suficiente tiempo. Se determina analíticamente a partir de la ecuación diferencial 3.3 haciendo nula la derivada de la velocidad.

$$\dot{v} = \frac{f}{m} - \frac{k}{m}v_{lim}^2 = 0 \rightarrow v_{lim} = \sqrt{\frac{f}{k}} \quad (3.4)$$

A continuación se presentan distintos modelos que pueden confeccionarse para representar al sistema no lineal y se juzgará la bondad de aproximación en lo relativo a la exactitud del régimen permanente y a la rapidez o lentitud relativa de la respuesta prevista por el modelo con respecto a la respuesta real.

3.1.2. Modelo lineal

Según la ecuación 3.4 al someter al sistema a una entrada f_0 se alcanzará un equilibrio entorno a v_0 dado por

$$v_0 = \sqrt{\frac{f_0}{k}} \quad (3.5)$$

Utilizaremos la ecuación diferencial 3.3 para llegar a la expresión general del sistema anterior linealizado en un punto (f_0, x_0) . Su linealización se muestra en la ecuación 3.6.

$$m [\dot{v}(t) - \dot{v}_0] = [f(t) - f_0] - 2kv_0 [v(t) - v_0] \quad (3.6)$$

Si se tiene en cuenta la relación 3.5 obtendremos la ecuación diferencial que gobierna el sistema linealizado del sistema real en torno al punto de equilibrio (f_0, x_0) .

$$\dot{v}(t) = \frac{f(t) - f_0}{m} - \frac{2k}{m} [v_0 (v(t) - v_0)] \quad (3.7)$$

En la figura 3.3 se representa el comportamiento del sistema linealizado en el plano de fases por una recta tangente a la curva del sistema no lineal en $(v_0, \dot{v}(v_0))$.

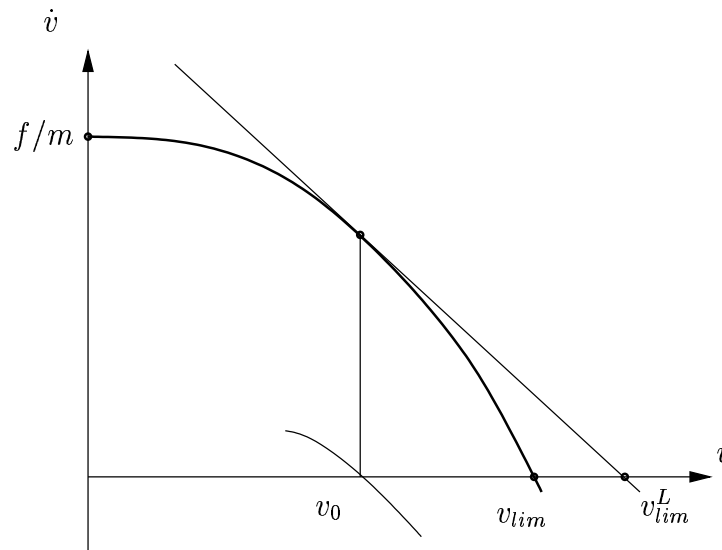


Figura 3.3: Sistema linealizado, ante escalón positivo

Se aprecia que la dinámica lineal se ajustará a la real mientras la velocidad no varíe mucho respecto al punto de linealización. Pueden concretarse varios aspectos que resultarían al comparar la respuesta ante escalón unitario en f del modelo contra la respuesta del sistema no lineal real, como por ejemplo la ganancia del sistema, o lo que es lo mismo, el valor del régimen permanente para ambos sistemas, o la rapidez con la que alcanzan este régimen permanente.

En la figura 3.3 puede observarse en primer lugar que el sistema lineal que estaba en equilibrio ante entrada f_0 , ahora excitado con $f > f_0$, siempre predice una velocidad límite v_{lim}^L mayor que la velocidad límite v_{lim} que adquiriría el sistema real bajo las mismas condiciones: *el sistema lineal predice una ganancia mayor que la real.*

Cuando el escalón se da hacia fuerzas menores ocurre la situación mostrada en la figura 3.4, por ejemplo, cuando desde f_0 se deja de excitar al sistema ($f = 0$).

El sistema estaba en reposo ante entrada $f_0 > 0$ a la que corresponde una velocidad v_0 según la ecuación 3.5 e instantáneamente se le quita la excitación lo que produce el cambio de trayectoria. En este caso se aprecia que el equilibrio se alcanza a una velocidad v_{lim} nula, mientras que el sistema lineal predice una velocidad límite positiva v_{lim}^L : *el sistema lineal predice una ganancia menor que la real.*

Para comparar la dinámica del modelo lineal con respecto al sistema real utilizaré una pequeña propiedad de los sistemas dinámicos que versa así:

Sea un sistema cuya dinámica viene dada por la ecuación diferencial $\dot{x} = h(x)$ ocurre que el tiempo que transcurre entre que el sistema pasa de un estado x_1 a un segundo estado x_2 se puede calcular como (ver figura 3.5)

$$t_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}} \quad (3.8)$$

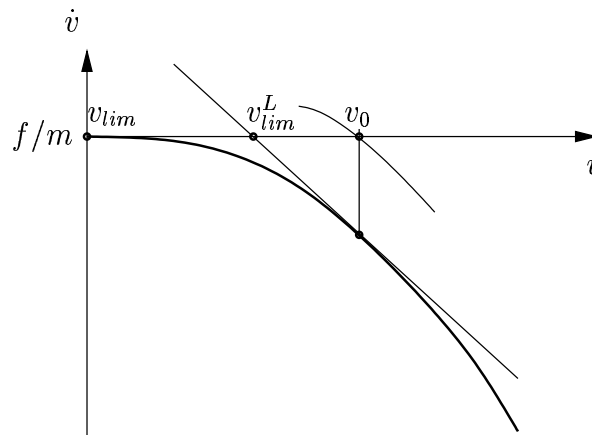
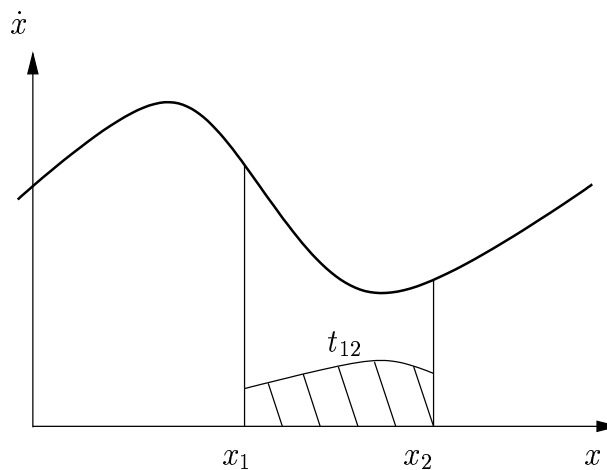


Figura 3.4: Sistema linealizado, ante escalón negativo

Figura 3.5: Tiempo entre x_1 y x_2

Utilizando este resultado podemos divisar sin necesidad de integrar las ecuaciones diferenciales cuál de los dos sistemas llegará antes a un estado concreto de la trayectoria y cuál será el retraso del más lento de los dos del siguiente modo: *el sistema cuya gráfica $\dot{x} = f(x)$ quede por encima tendrá su gráfica $1/\dot{x} = 1/f(x)$ por debajo, encerrará menos área y por tanto el tiempo que empleará el estado en evolucionar será menor* (ver figura 3.6). Esto se manifestará en que en efecto el sistema más lento llegará después al valor x para el que se ha realizado el cálculo (ver figura 3.7).

En el ejemplo propuesto y utilizando este argumento puede decirse que en el caso de que el incremento de f sea positivo tendremos que el sistema lineal será más rápido que el real y en el caso de que el incremento de f sea negativo se tendrá que el sistema lineal será más lento.

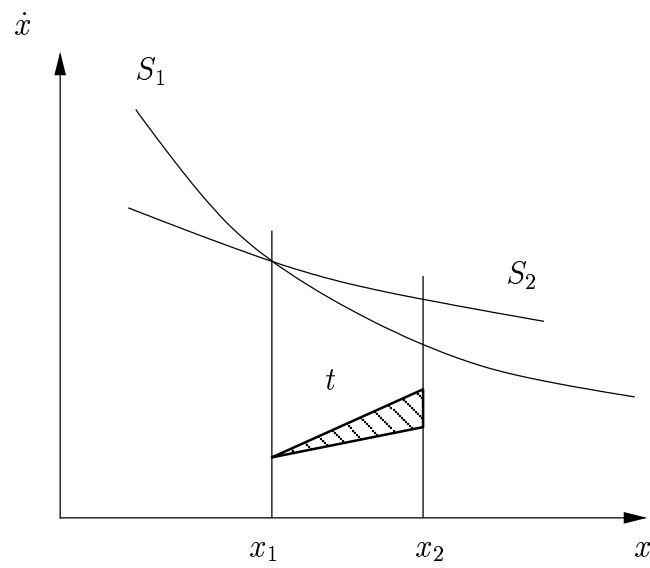


Figura 3.6: Diferencia entre el tiempo en llegar de los dos sistemas

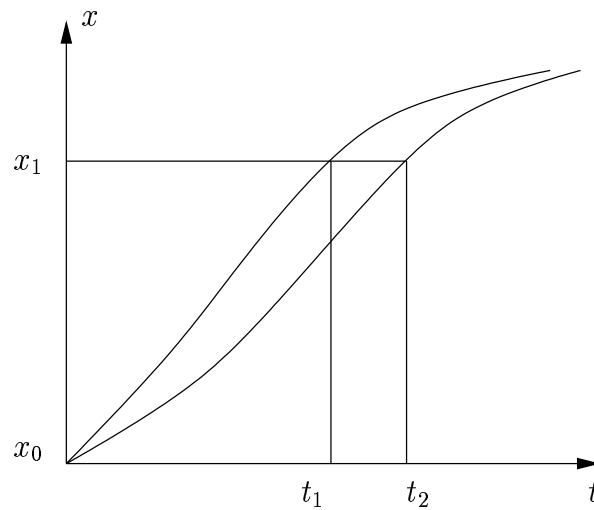


Figura 3.7: Comparación de la rapidez de los sistemas

3.1.3. Sistema borroso de Takagi-Sugeno

El sistema borroso de Takagi-Sugeno se sintetiza a partir del conocimiento de dos modelos lineales en los dos puntos $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ donde se centran las funciones de pertenencia.

Vamos a tomar los modelos lineales a partir de la linealización que se realizó en la 3.1.2, aunque en un caso real se obtendrían dando escalones “pequeños” al sistema entorno al estado al cual se quiere asociar un sistema lineal.

Pongamos que los dos sistemas obtenidos entorno a $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ son respectivamente:

$$\dot{v}^{(1)}(t) = \frac{f(t) - f_0^{(1)}}{m} - \frac{2k}{m} \left[v_0^{(1)} (v(t) - v_0^{(1)}) \right] \quad (3.9)$$

$$\dot{v}^{(2)}(t) = \frac{f(t) - f_0^{(2)}}{m} - \frac{2k}{m} \left[v_0^{(2)} (v(t) - v_0^{(2)}) \right] \quad (3.10)$$

Las funciones de pertenencia para los conjuntos borrosos serán triangulares de la forma mostrada en la figura 3.8.

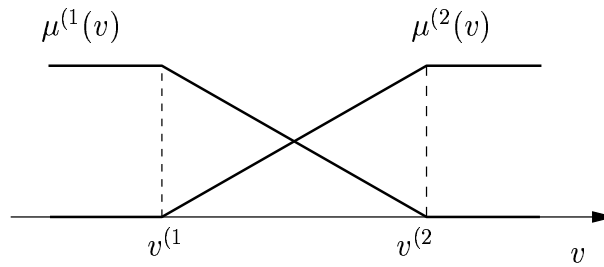


Figura 3.8: Funciones características triangulares para los conjuntos borrosos.

Las reglas del sistema borroso son:

Si v es $v^{(1)}$ entonces $\dot{v} = \dot{v}^{(1)}(f, v)$

Si v es $v^{(2)}$ entonces $\dot{v} = \dot{v}^{(2)}(f, v)$

Así, en este caso el sistema borroso viene gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{v} = \mu^{(1)}(v)\dot{v}^{(1)} + \mu^{(2)}(v)\dot{v}^{(2)} = \begin{cases} \dot{v}^{(1)}(t) & v < v^{(1)} \\ \frac{v^{(2)}-v(t)}{v^{(2)}-v^{(1)}}\dot{v}^{(1)}(t) + \frac{v(t)-v^{(1)}}{v^{(2)}-v^{(1)}}\dot{v}^{(2)}(t) & v^{(1)} < v < v^{(2)} \\ \dot{v}^{(2)}(t) & v > v^{(2)} \end{cases} \quad (3.11)$$

La forma de esta ecuación diferencial dibujada en el plano de fases no es evidente, pero sí que se puede decir que cumple las siguientes propiedades:

1. Es tangente a la curva que describe la ecuación diferencial en los puntos donde se formulan las reglas.
2. Al ser una ponderación de las aproximaciones lineales su valor siempre estará comprendido entre los valores de los sistemas lineales.

La segunda propiedad implica que en sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales con gran curvatura y dados dos puntos de linealización donde se planteen las reglas suficientemente lejanos entre sí, ocurrirá que para escalones que llevan al estado desde un punto de linealización a un segundo punto intermedio *el error en régimen permanente del modelo será inaceptable*¹

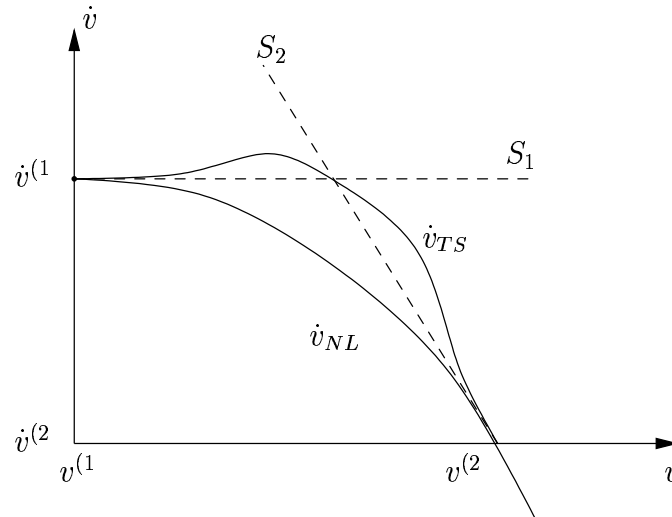


Figura 3.9: Aproximación a la dinámica del sistema borroso de Takagi-Sugeno.

3.1.4. Sistema borroso de Mamdani

La aproximación borrosa de Mamdani a la dinámica del sistema parte del conocimiento del valor de la respuesta del sistema \dot{v} en dos estados concretos v_1 y v_2 e interpola entre ellos según el carácter de las funciones de pertenencia escogidas para representar a los conjuntos borrosos.

Las funciones de pertenencia para los conjuntos borrosos correspondientes pueden ser en primer lugar triangulares de la forma mostrada en la figura 3.11

Las reglas se formulan del siguiente modo:

Si v es v_1 entonces $\dot{v} = \dot{v}_1$

Si v es v_2 entonces $\dot{v} = \dot{v}_2$

En este caso la aproximación que da el sistema borroso a la dinámica del sistema real viene dada por la expresión 3.12

$$\dot{v} = \mu_1(v)\dot{v}_1 + \mu_2(v)\dot{v}_2 = \begin{cases} \dot{v}_1 & v \leq v_1 \\ \frac{v_2-v}{v_2-v_1}\dot{v}_1 + \frac{v-v_1}{v_2-v_1}\dot{v}_2 = \frac{(v_2\dot{v}_1-v_2\dot{v}_1)-(v_1-v_2)v(t)}{v_2-v_1} & v_1 < v < v_2 \\ \dot{v}_2 & v \geq v_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

Como puede observarse en la figura 3.12 en el tramo $v_1 < v < v_2$ el sistema se comporta de forma lineal (afín en verdad).

¹ver simulaciones posteriores en la sección "ejemplo numérico"

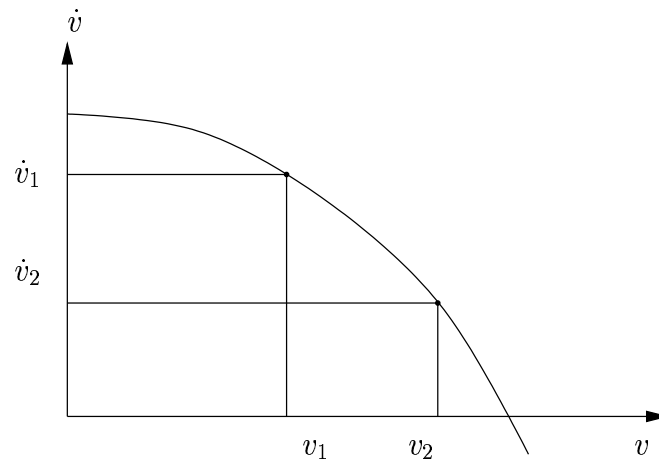


Figura 3.10: Formulación de las reglas del sistema borroso de Mamdani.

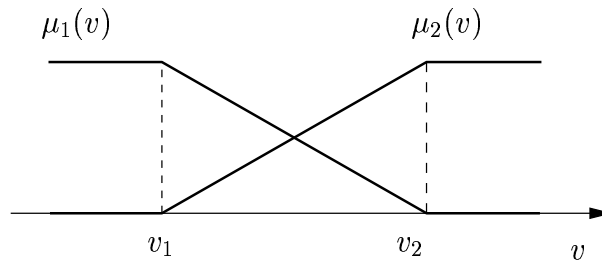


Figura 3.11: Funciones características de los conjuntos borrosos triangulares

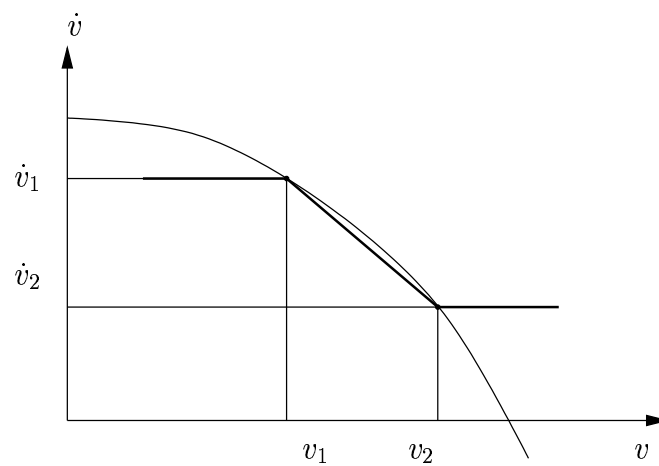


Figura 3.12: Aproximación de la dinámica por el sistema borroso de Mamdani

Puede afirmarse que si un escalón en f lleva el sistema de velocidad v_1 a velocidad v_2 entonces el modelo borroso de Mamdani llegará a la misma velocidad límite sin error alguno,

no ocurriendo lo mismo en general si el escalón lleva al sistema real a velocidades iniciales o límite no coincidentes con los puntos en los que se formulan las reglas.

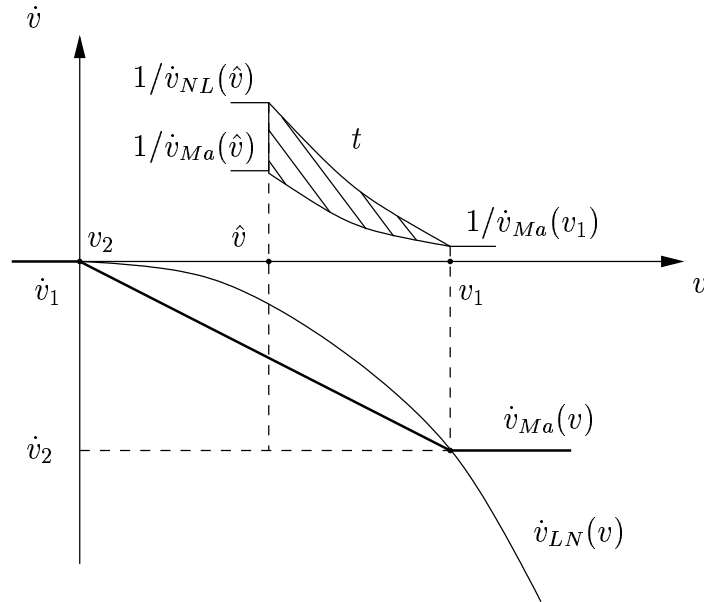


Figura 3.13: Estimación del adelanto del sistema borroso de Mamdani

En cuanto a la dinámica (figura 3.13) y siguiendo los razonamientos anteriores puede afirmarse que el sistema borroso es *más rápido* que el sistema real cuando se le somete a un *escalón negativo* en su entrada f .

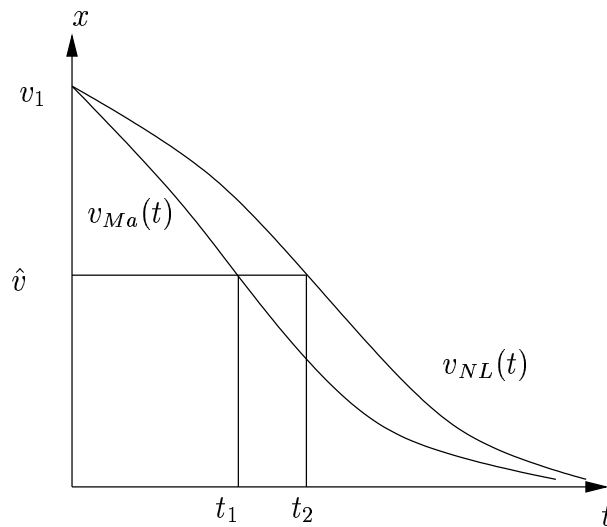


Figura 3.14: Comparación de la dinámica ante escalón negativo

3.1.5. Sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia polinómicas de tercer orden

La aproximación borrosa de Mamdani a la dinámica del sistema puede mejorar si se emplean funciones de pertenencia polinómicas de tal manera que la ecuación diferencial que rige la dinámica del sistema borroso se aproxime mejor a la ecuación diferencial que gobierna al sistema no lineal real.

Las reglas se formulan del siguiente modo:

Si v es v_1 entonces $\dot{v} = \dot{v}_1$

Si v es v_2 entonces $\dot{v} = \dot{v}_2$

El sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia triangulares toma los valores correctos de \dot{v} en los puntos v_1 y v_2 donde se formulan las reglas, pero en otro caso habrá diferencias entre el valor previsto por el sistema borroso y el real (ver figura 3.12).

En el caso de utilizar funciones de pertenencia polinómicas de tercer orden se podrán ajustar las funciones para que la dinámica del sistema se aproxime mejor. De hecho, y en general, se puede deducir la expresión de las funciones de pertenencia para que la función objetivo borrosa tome una cierta forma del siguiente modo:

La función resultante de la inferencia será

$$\dot{v}(v) = \mu_1(v)\dot{v}_1 + \mu_2(v)\dot{v}_2 \quad (3.13)$$

Si se emplea una descripción normalizada para los conjuntos borrosos,

$$\mu_1(v) + \mu_2(v) = 1 \longrightarrow \mu_2(v) = 1 - \mu_1(v) \quad (3.14)$$

De esto se deduce

$$\dot{v}(v) = \mu_1(v)\dot{v}_1 + (1 - \mu_1(v))\dot{v}_2 \implies \mu_1(v) = \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}(v)}{\dot{v}_2 - \dot{v}_1} \quad (3.15)$$

La segunda se deduce de inmediato a partir de la primera,

$$\mu_2(v) = \frac{\dot{v}(v) - \dot{v}_1}{\dot{v}_2 - \dot{v}_1} \quad (3.16)$$

Por lo tanto si se utiliza una aproximación según splines cúbicos a la dinámica del sistema no lineal entonces las funciones de pertenencia resultan también splines cúbicos.

Si denominamos $\dot{v}_f(v)$ a la aproximación borrosa del sistema por este método, la expresión 3.13 permite traducir las siguientes condiciones:

$$\dot{v}_f(v_1) = \dot{v}_1 \quad (3.17)$$

$$\dot{v}_f(v_2) = \dot{v}_2 \quad (3.18)$$

$$\left[\frac{d\dot{v}_f}{dv} \right]_{v_1} = \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_1} \quad (3.19)$$

$$\left[\frac{d\dot{v}_f}{dv} \right]_{v_2} = \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_2} \quad (3.20)$$

a estas otras condiciones sobre las dos funciones de pertenencia:

$$\begin{aligned}
 \mu_1(v_1) &= 1 & \mu_2(v_1) &= 0 \\
 \mu_1(v_2) &= 0 & \mu_2(v_2) &= 1 \\
 \left[\frac{d\mu_1}{dv} \right]_{v_1} &= -\frac{1}{v_2-v_1} \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_1} & \left[\frac{d\mu_2}{dv} \right]_{v_1} &= \frac{1}{v_2-v_1} \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_1} \\
 \left[\frac{d\mu_1}{dv} \right]_{v_2} &= -\frac{1}{v_2-v_1} \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_2} & \left[\frac{d\mu_2}{dv} \right]_{v_2} &= \frac{1}{v_2-v_1} \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_2}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Estos dos juegos de ecuaciones para $\mu_1(v)$ y $\mu_2(v)$ son suficientes para estimar los coeficientes de los splines cúbicos.

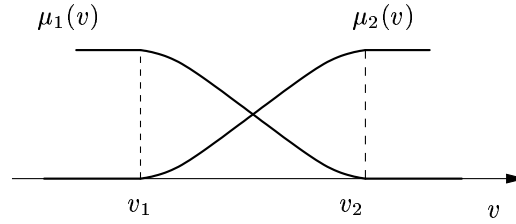


Figura 3.15: Funciones de pertenencia polinómicas cúbicas

En general para la función característica del conjunto borroso i

$$\mu(v) = av^3 + bv^2 + cv + d \tag{3.22}$$

Aplicar las ecuaciones anteriores conduce a

$$\begin{aligned}
 av_1^3 + bv_1^2 + cv_1 + d &= 1 \\
 av_2^3 + bv_2^2 + cv_2 + d &= 0 \\
 3av_1^2 + 2bv_1 + c &= -\frac{1}{v_2-v_1} \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_1} \\
 3av_2^2 + 2bv_2 + c &= -\frac{1}{v_2-v_1} \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_2}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Que puede expresarse de manera matricial como

$$\begin{pmatrix} v_1^3 & v_1^2 & v_1 & 1 \\ v_2^3 & v_2^2 & v_2 & 1 \\ 3v_1^2 & 2v_1 & v_1 & 0 \\ 3v_2^2 & 2v_2 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{v_2-v_1} \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_1} \\ -\frac{1}{v_2-v_1} \left[\frac{d\dot{v}}{dv} \right]_{v_2} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

El punto más delicado del método anterior es la estimación de $\frac{d\dot{v}}{dv}$ en los dos puntos donde se formulan las reglas. Se va a proponer un método para derivar la obtención de las funciones de pertenencia a partir de la información contenida en el modelo de Takagi-Sugeno.

Partimos del modelo borroso de Takagi-Sugeno formulado así:

$$\dot{v}(v) = \mu^{(1)}(v)\dot{v}^{(1)} + \mu^{(2)}(v)\dot{v}^{(2)} \tag{3.25}$$

siendo los sistemas lineales estos:

$$\dot{v}^{(i)}(t) = \frac{f(t) - f_0^{(i)}}{m} - \frac{2k}{m} \left[v_0^{(i)} (v(t) - v_0^{(i)}) \right] \quad i = 1, 2 \quad (3.26)$$

Como cada sistema lineal se ajusta en punto y derivada a la función no lineal en los puntos $v_1 = v_0^{(1)}$ y $v_2 = v_0^{(2)}$ respectivamente, entonces puedo aprovechar esa información para ajustar las funciones de pertenencia de los conjuntos borrosos del sistema de Mamdani. En este caso los valores que se necesitan son:

$$\mu^{(1)}(v_1) = 1 \quad (3.27)$$

$$\mu^{(1)}(v_2) = 0 \quad (3.28)$$

$$\left[\frac{d\mu^{(1)}}{dv} \right]_{v_1} = -\frac{v'(v_1)}{v_2 - v_1} = \frac{2kv_1}{m(v_2 - v_1)} \quad (3.29)$$

$$\left[\frac{d\mu^{(1)}}{dv} \right]_{v_2} = -\frac{v'(v_2)}{v_2 - v_1} = \frac{2kv_2}{m(v_2 - v_1)} \quad (3.30)$$

$$(3.31)$$

Esto determina completamente la primera función de pertenencia. La segunda se puede obtener operando de igual modo, pero se deduce inmediatamente de la ecuación 3.14.

En general este método aproximará más finamente la dinámica pero no se podrá predecir si el sistema borroso será más lento o más rápido que el real. En este caso concreto es de esperar que la aproximación borrosa siga fielmente al modelo no lineal porque el sistema a aproximar viene expresado por una ecuación diferencial con términos polinómicos de grado 2.

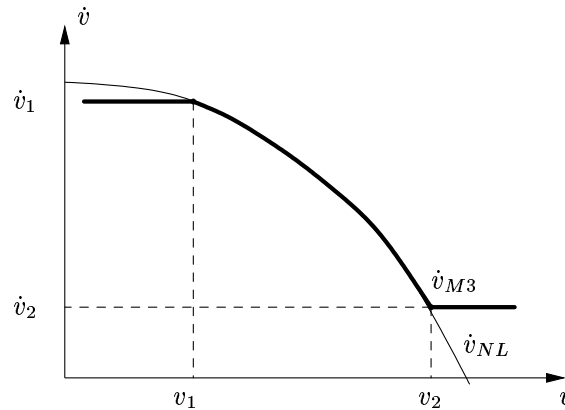


Figura 3.16: Aproximación a la dinámica no lineal del sistema borroso de Mamdani con polinómicas

3.1.6. Ejemplo numérico

Para mostrar la veracidad de lo arriba afirmado se presenta a continuación un ejemplo numérico del sistema físico anterior junto con las simulaciones realizadas para comparar la dinámica de los siguientes sistemas

- No lineal
- Linealizado
- Borroso de Takagi-Sugeno
- Borroso de Mamdani con funciones polinómicas de primer orden
- Borroso de Mamdani con funciones polinómicas de tercer orden

Las simulaciones se han diseñado y programado en el lenguaje de programación *Octave* y realizado para los siguientes valores de los parámetros:

$$m = 1 \text{ kg} \quad (3.32)$$

$$k = 1 \text{ kg m}^{-1} \quad (3.33)$$

Como condición inicial se ha partido del régimen permanente alcanzado en el sistema real correspondiente a $f = 4 \text{ N} \implies v = 2 \text{ m s}^{-1}$ y se ha dado un escalón negativo para anular f (ver la figura 3.4).

En la figura 3.17 puede compararse la respuesta de todos los sistemas ante las mismas condiciones.

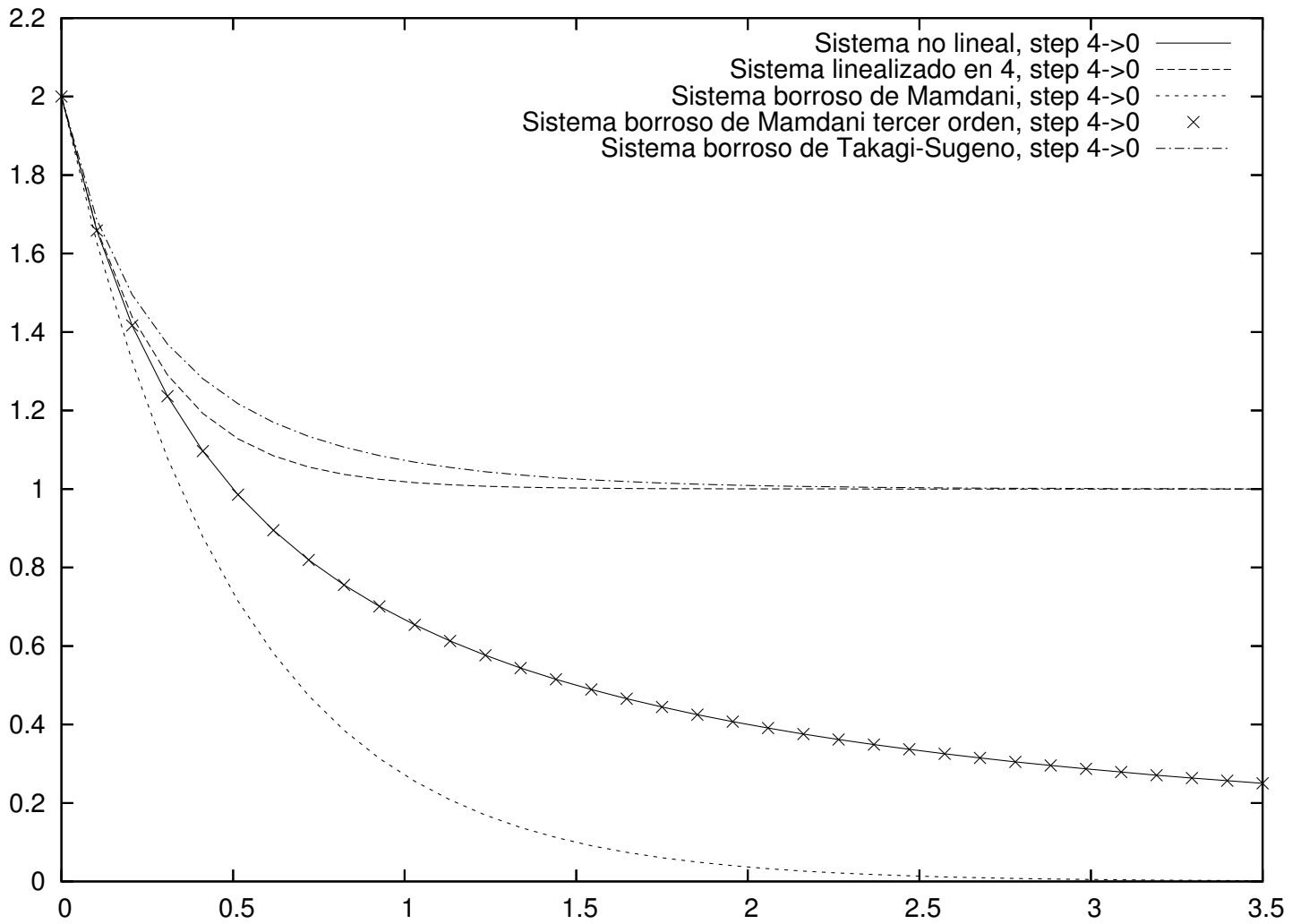


Figura 3.17: Comparación entre la dinámica de los sistemas

La respuesta ante escalón del sistema no lineal es un sencillo problema de resolución de ecuaciones diferenciales con valores en la frontera:

$$\dot{x}(t) = -x^2, \quad x(0) = 2 \quad (3.34)$$

La solución se deduce del siguiente modo:

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 \quad (3.35)$$

$$\frac{dx}{x^2} = -dt \quad (3.36)$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = -t \quad (3.37)$$

$$(3.38)$$

$$\left[\frac{1}{x} \right]_{x_0}^{x(t)} = t \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x_0} = t \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{x(t)} = t + \frac{1}{x_0} \quad (3.41)$$

$$x(t) = \frac{1}{1/x_0 + t} \quad (3.42)$$

Cada curva de la familia de soluciones toma la forma de rama de hipérbola como puede verse en la figura 3.18.

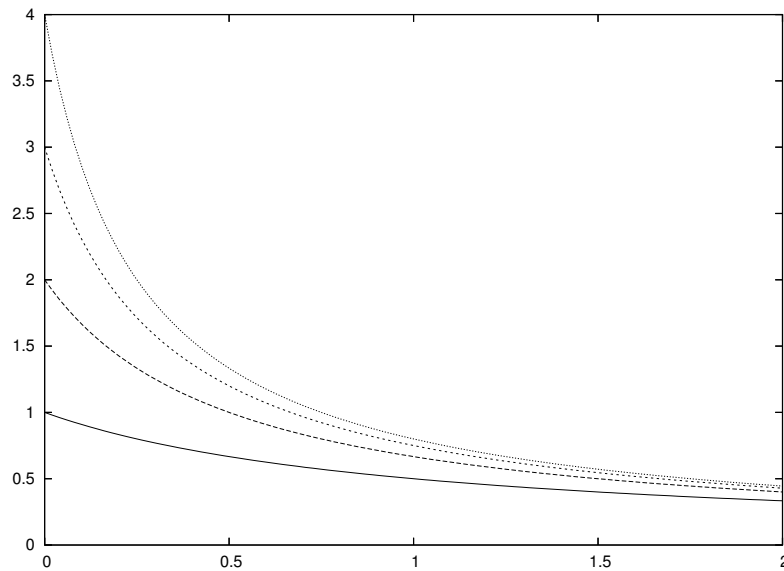


Figura 3.18: Familia de soluciones

Sistema lineal

La figura 3.19 muestra que el sistema lineal tiene 1 por régimen permanente y es *más lento* que el sistema físico.

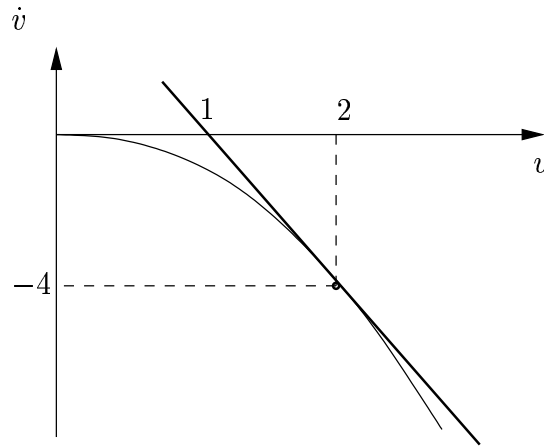


Figura 3.19: Dinámica del sistema lineal

No es por tanto aceptable como aproximación pues no se consigue acertar la respuesta en régimen permanente. Esto se muestra en la comparación de las respuestas en la figura 3.20.

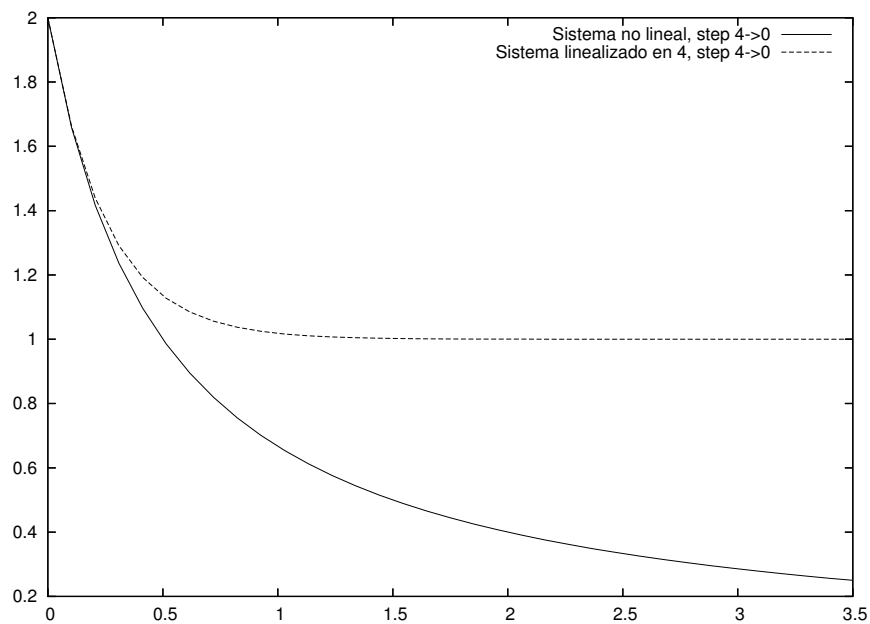


Figura 3.20: Sistema linealizado frente al no lineal

Sistema borroso de Takagi-Sugeno

Se observa de la figura 3.21 que el sistema de Takagi-Sugeno resulta más lento aún que el lineal y predice erróneamente el valor del régimen permanente.

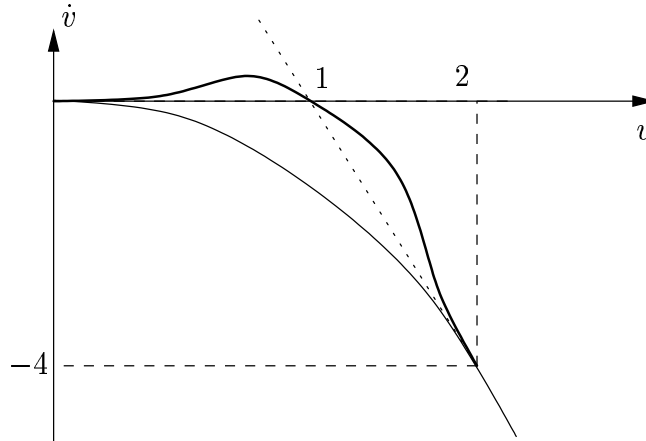


Figura 3.21: Dinámica del sistema Takagi-Sugeno

Como puede apreciarse en la figura 3.22, tampoco es aceptable como modelo para el sistema.

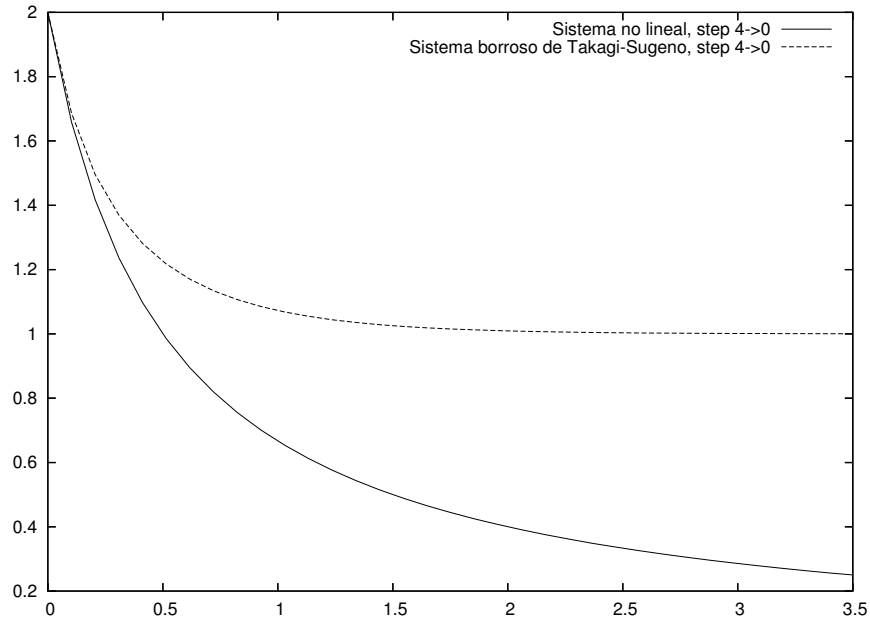


Figura 3.22: Sistema de Takagi-Sugeno frente al no lineal

Sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia triangulares

El sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia triangulares es más rápido que el sistema físico como puede verse en la figura 3.23, aunque al menos el sistema toma el mismo valor en régimen permanente.

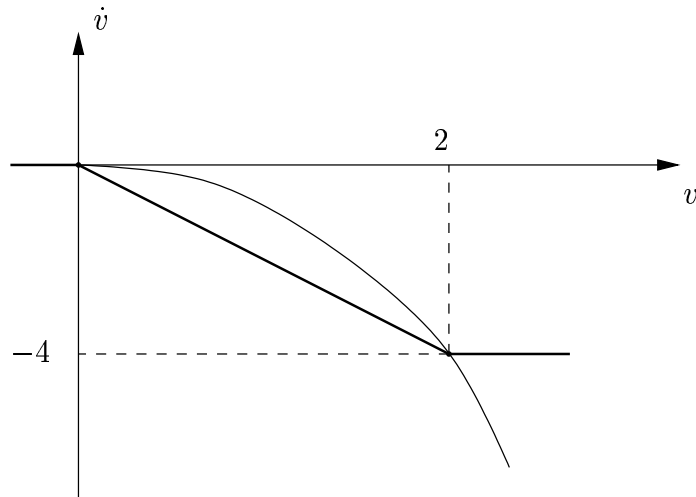


Figura 3.23: Dinámica del sistema borroso de Mamdani

Las afirmaciones anteriores pueden contrastarse con la figura 3.24

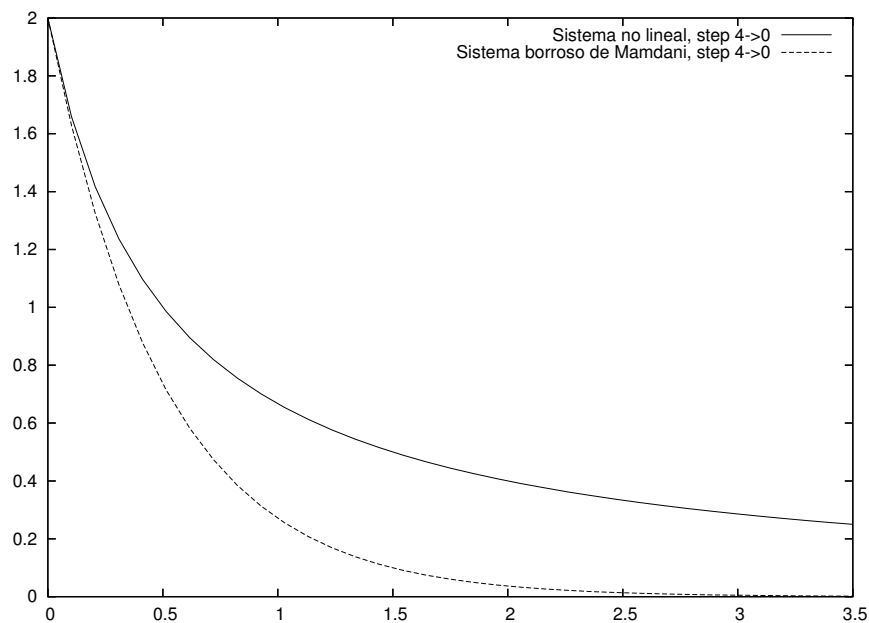


Figura 3.24: Sistema linealizado frente al no lineal

Sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia polinómicas de tercer orden

En la figura 3.25 se aprecia que el sistema borroso de Mamdani ajusta perfectamente la dinámica del sistema físico y por tanto tendrá la misma respuesta (ver figura 3.26) ante las mismas condiciones iniciales.

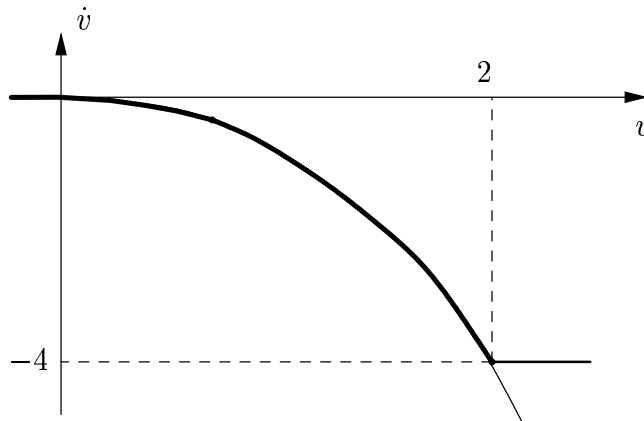


Figura 3.25: Dinámica del sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia polinómicas

Esto puede verse en el dominio del tiempo a través de la integración de las ecuaciones diferenciales de los sistemas desde las mismas condiciones iniciales (figura 3.26)

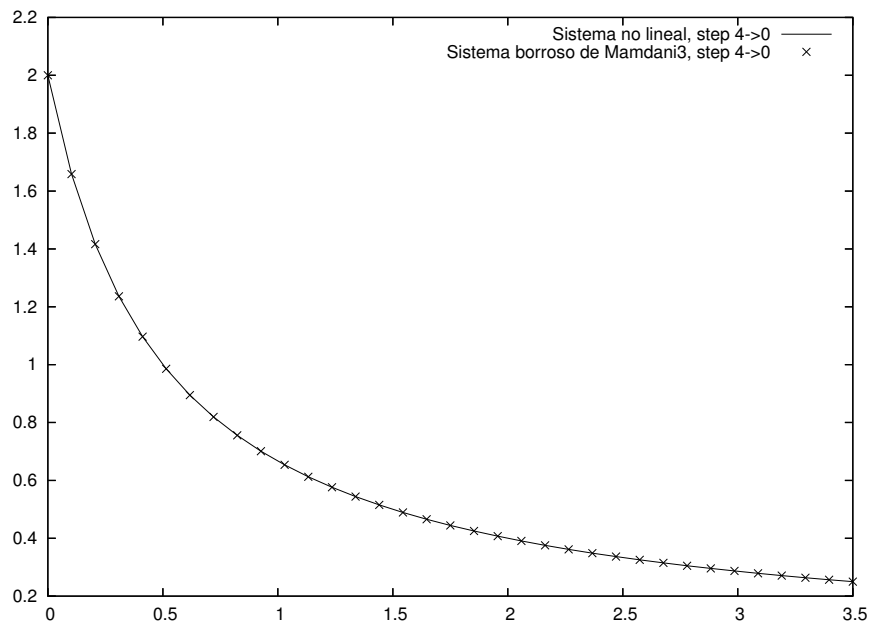


Figura 3.26: Sistema borroso frente al no lineal

3.2. Síntesis y análisis dinámico de los modelos

En esta sección se presentan los modelos borrosos y las comparaciones entre cada uno de los modelos y el sistema original. Se pretende comparar los resultados obtenidos por cada tipo de modelo y allí donde es posible explicar por qué razón aparecen las diferencias.

En primer lugar se muestra la aproximación por sistemas lineales. Se somete a los dos sistemas que se extrajeron en la sección 2.2.8 a escalones que llevan el estado del sistema lejos de la zona donde se linealizó y se muestra que la dinámica resulta claramente errónea.

Se pasa después a presentar los métodos de interpolación borrosos por orden de complejidad y se compararán sus resultados.

La metodología seguida para sintetizar los modelos borrosos fue la siguiente

1. Se identifican sistemas lineales en los puntos extremos de la primera variable de estado.
2. Se utilizan los sistemas lineales para formular inmediatamente los sistemas de Takagi-Sugeno.
3. De los sistemas lineales se extrae el valor de \ddot{x} en los puntos de equilibrio y se formula el modelo de Mamdani.
4. En el caso del modelos de Mamdani con funciones de pertenencia de tercer orden se deducen las funciones de pertenencia a partir los modelos lineales planteando el sistema de ecuaciones 3.27.

En el campo experimental *no se ha encontrado un procedimiento para hacer la identificación de los sistemas lineales entorno a puntos del tipo (x, \dot{x}) que no son de equilibrio*, con lo que en las premisas de las reglas con las que se formulan los modelos borrosos tan sólo aparece la primera variable de estado.

Por ejemplo, la consecuencia de la regla (i, j) del modelo de Takagi-Sugeno siguiente

$$\text{SI } (x \text{ ES } x^{(i)} \text{ Y } (\dot{x} \text{ ES } \dot{x}^{(j)} \text{ ENTONCES } \ddot{x} = f^{(ij)}(x, \dot{x}))$$

es la aproximación lineal al sistema real entorno a $(x^{(i)}, \dot{x}^{(j)})$. El problema es que no se ha encontrado la manera de identificar este sistema lineal salvo en el caso $\dot{x}^{(j)} = 0$, esto es, alrededor de puntos de equilibrio.

Como consecuencia, el modelo de Takagi-Sugeno debe formularse de este otro modo:

$$\text{SI } (x \text{ ES } x^{(i)} \text{ ENTONCES } \ddot{x} = f^{(i)}(x, \dot{x}))$$

3.2.1. Dinámica lineal

En esta sección se muestra que los modelos lineales de segundo orden obtenidos en la sección 2.2.7 pueden ajustar bien la dinámica del sistema solo si el estado, al evolucionar, no se aleja mucho (en alguna norma) de la región del espacio de estados entorno a la cual se realizó la identificación lineal.

Para mostrarlo se va someter al modelo lineal en el extremo inferior a los escalones

- $u = 0 \rightarrow 1$
- $u = 0 \rightarrow 10$

y al modelo obtenido entorno al límite superior a los escalones

- $u = 10 \rightarrow 9$
- $u = 10 \rightarrow 0$

mostrando en todos los casos la dinámica real del sistema para poder juzgar la bondad de la aproximación.

Modelo en $u = 0$

Se puede observar en la figura 3.27 que el modelo lineal predice muy bien el comportamiento del sistema real mientras el estado se mantenga cerca de la zona de linealización, como es el caso de la respuesta ante escalón unitario.

- El modelo lineal predice el régimen permanente de manera muy certera.
- Dinámica muy parecida en cuanto a tiempo de subida y tiempo de establecimiento.
- Tanto el sistema real como el modelo se comportan de modo sobreamortiguado.

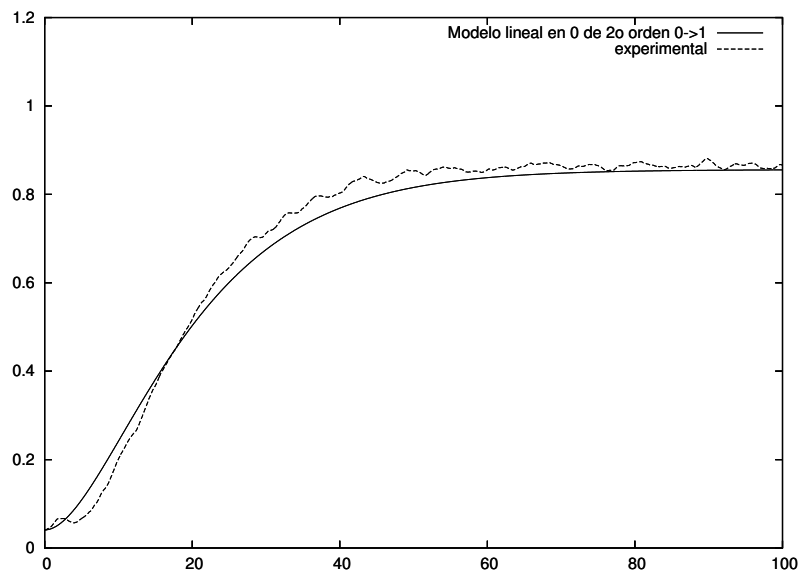


Figura 3.27: Escalón $u = 0 \rightarrow 1$ para el modelo lineal en $u = 0$

No ocurre lo mismo ante escalones lo suficientemente grandes en la entrada como para llevar el estado del sistema real hacia el otro extremo del espacio de estados. En este caso el modelo lineal responde a un escalón $u = 0 \rightarrow 10$ según la figura 3.28, presentando las siguientes características:

- Error enorme en el régimen permanente. Esto es debido a que lejos del punto de linealización se está utilizando un modelo que tiene casi el doble de ganancia que sistema real.
- El modelo prevé un comportamiento del sistema bastante más lento que el comportamiento real en cuanto a tiempos de subida y de establecimiento.
- La dinámica que prevé el modelo es sobreamortiguada, mientras que el sistema real sobreoscila. El modelo sigue siendo sobreamortiguado aún lejos de la zona de linealización mientras que el sistema real tiene carácter subamortiguado cerca del extremo contrario.

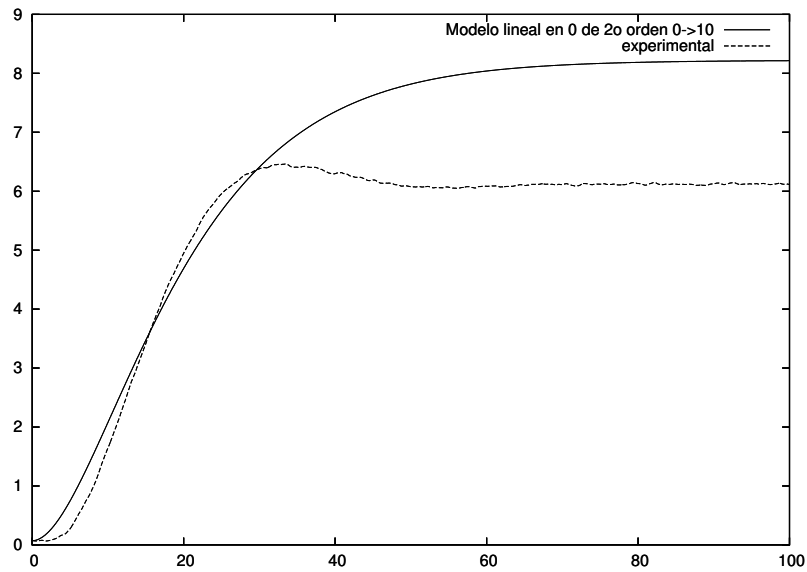


Figura 3.28: Escalón $u = 0 \rightarrow 10$ para el modelo lineal en $u = 0$

Modelo en $u = 10$

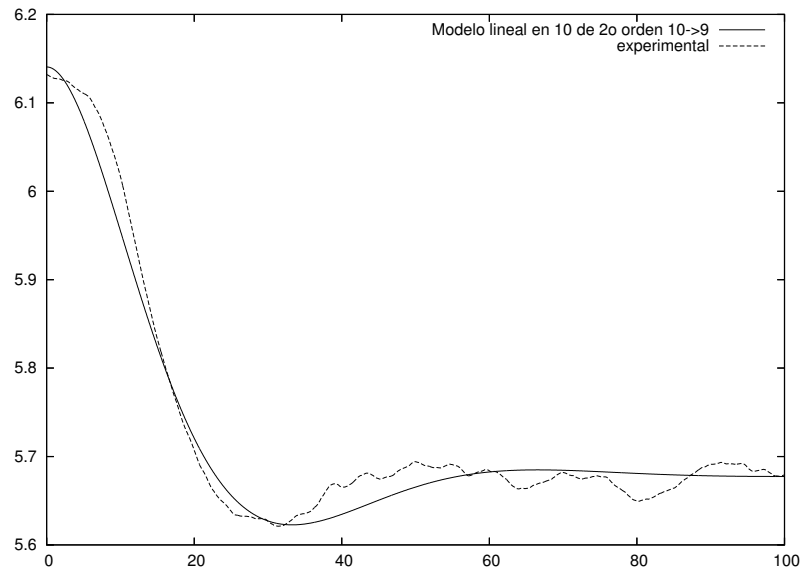
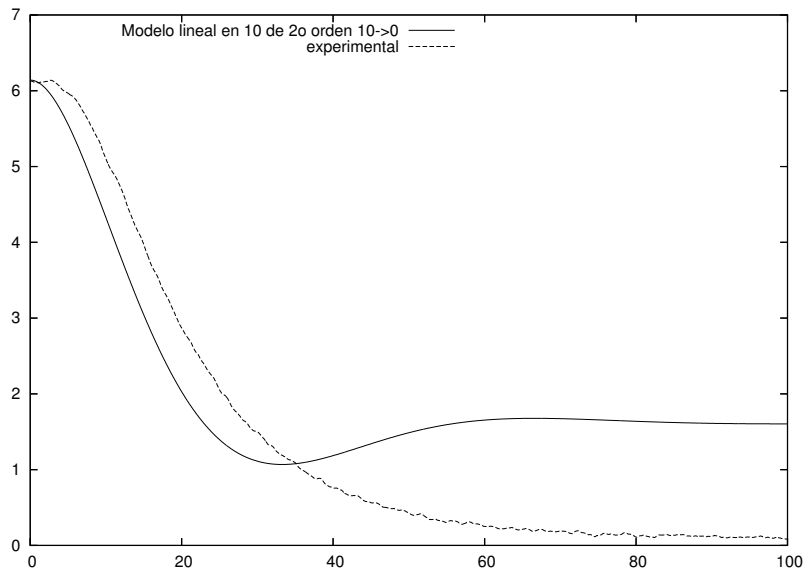
Al igual que ocurre con el modelo formulado en el rango inferior de la variable de salida, el modelo lineal obtenido en el extremo superior ajusta bien la respuesta ante escalón en su entorno de linealización, pero tampoco va a poder predecir correctamente el comportamiento del sistema real.

Sometido a un escalón descendente de 10 a 9 voltios el sistema evoluciona siguiendo al sistema real bastante fielmente como puede verse en la figura 3.29 .

- El sistema lineal prevé perfectamente el régimen permanente del sistema real.
- La dinámica es ligeramente más lenta, pero es aún así muy aproximada
- Tanto el sistema real como el modelo del sistema tienen un comportamiento sobreoscilatorio. Parecen tener el mismo pico de sobreoscilación y el mismo tiempo de pico.

Se puede observar en la figura 3.30 que el mismo modelo lineal respondiendo al escalón $u = 10 \rightarrow 0$ predice un comportamiento muy distinto al real.

- Se equivoca en la estática de forma inaceptable.
- El modelo prevé un comportamiento más rápido que el real. Esto se debe a que al linealizar el sistema real entorno a su punto de equilibrio superior se obtiene el modelo lineal de comportamiento más rápido posible, que es cota superior del comportamiento en el rango de la variable de salida.
- El modelo extrapola el comportamiento sobreoscilatorio del sistema en su límite superior a todo el rango de la variable de salida y no es capaz de predecir que ante este escalón el sistema real será no oscilatorio.

Figura 3.29: Escalón $u = 10 \rightarrow 9$ para el modelo lineal en $u = 10$ Figura 3.30: Escalón $u = 10 \rightarrow 0$ para el modelo lineal en $u = 10$

3.2.2. Modelo de *Takagi-Sugeno*

Esta sección presenta los resultados obtenidos al utilizar un modelo borroso de *Takagi-Sugeno* para aproximar la dinámica del sistema.

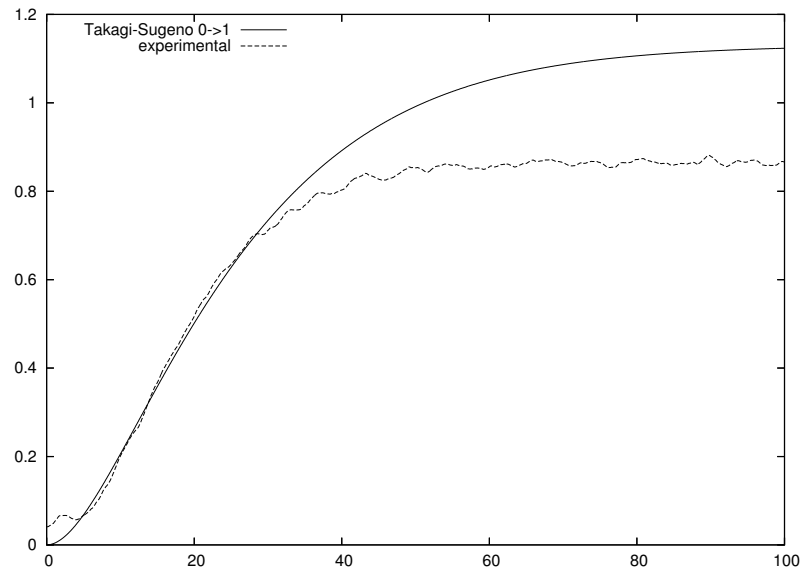
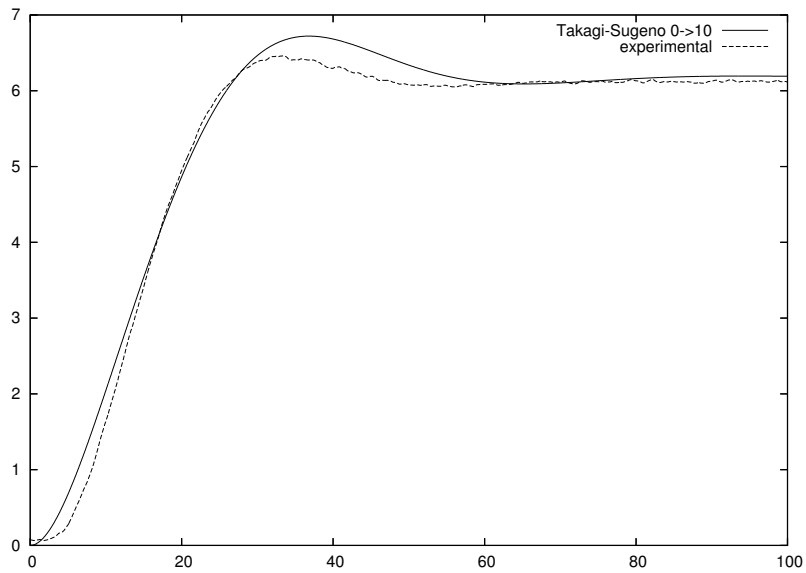
El modelo de Takagi-Sugeno que se ha formulado como aproximación al sistema no lineal está dado por las reglas:

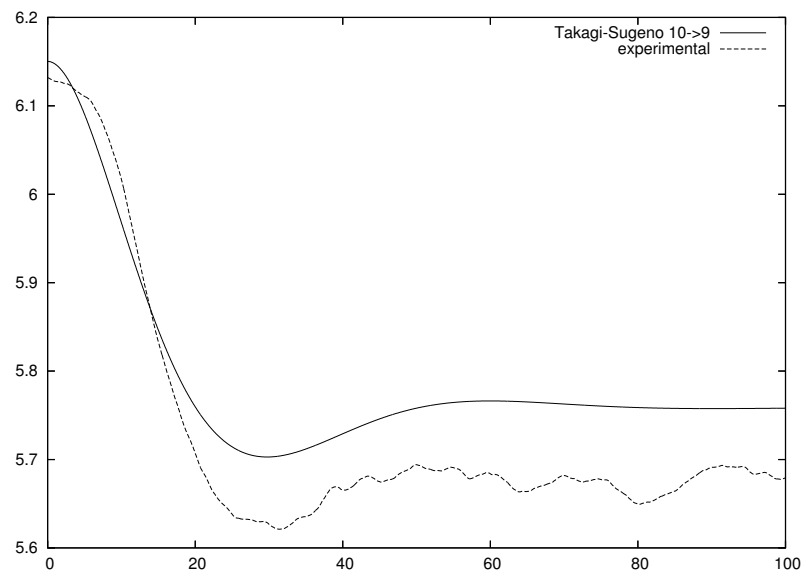
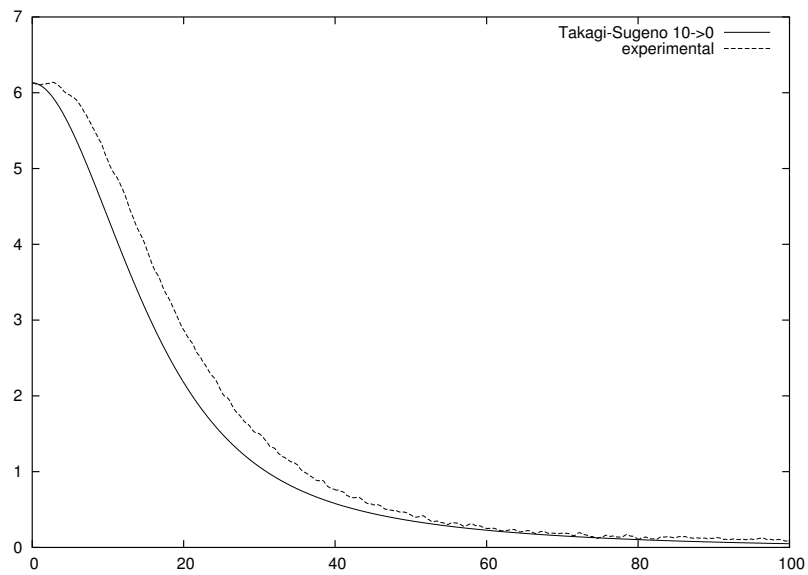
$$\begin{array}{ll} \text{SI } x \text{ ES } 0 & \text{ENTONCES } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 u \\ \text{SI } x \text{ ES } 6,18 & \text{ENTONCES } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 u \end{array}$$

siendo \mathbf{A}_i y \mathbf{B}_i las matrices del modelo en variables de estado dado en la sección 2.2.8. Tener en cuenta que en la segunda expresión los valores de \mathbf{x} y u son incrementales respecto a sus valores de equilibrio $x_0 = 6,18$ y $u_0 = 10$. Las funciones de pertenencia se toman triangulares.

Una vez escrito el simulador correspondiente se somete al modelo a la siguiente serie de escalones en la entrada para comparar la dinámica del sistema borroso de *Takagi-Sugeno* con la del sistema real.

- $u = 0 \rightarrow 1$ (figura 3.31)
 - El sistema de Takagi-Sugeno predice una ganancia errónea muy superior a la real.
 - La dinámica del sistema borroso es correcta.
 - El sistema borroso tiene el mismo carácter sobreamortiguado que el real.
- $u = 0 \rightarrow 10$ (figura 3.32)
 - El sistema de Takagi-Sugeno clava el régimen permanente del sistema real.
 - El sistema borroso es ligeramente más lento, tiene un mayor tiempo de establecimiento.
 - Sobreoscila al igual que el real, pero su pico de oscilación es considerablemente mayor y se da ligeramente más tarde
- $u = 10 \rightarrow 9$ (figura 3.33)
 - El sistema borroso no es capaz de prever el valor del régimen permanente para la maqueta.
 - La dinámica es muy similar a la del sistema real.
 - La sobreoscilación es muy similar, con el mismo tiempo de pico y misma cantidad de sobreoscilación.
- $u = 10 \rightarrow 0$ (figura 3.34)
 - El régimen permanente del modelo borroso coincide con el observado.
 - La dinámica es muy parecida salvo un ligero adelanto.
 - Ambas respuestas son no oscilatorias.

Figura 3.31: Escalón $u = 0 \rightarrow 1$ para *Takagi-Sugeno*Figura 3.32: Escalón $u = 0 \rightarrow 10$ para *Takagi-Sugeno*

Figura 3.33: Escalón $u = 10 \rightarrow 9$ para *Takagi-Sugeno*Figura 3.34: Escalón $u = 10 \rightarrow 0$ para *Takagi-Sugeno*

3.2.3. Modelo borroso de *Mamdani* con funciones de pertenencia triangulares

Esta sección presenta los resultados obtenidos al utilizar un modelo borroso de *Mamdani* para aproximar la dinámica del sistema.

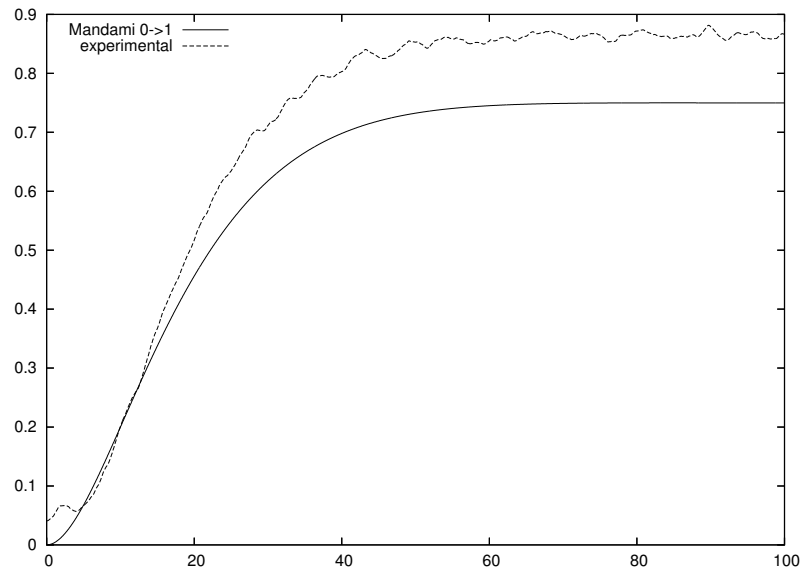
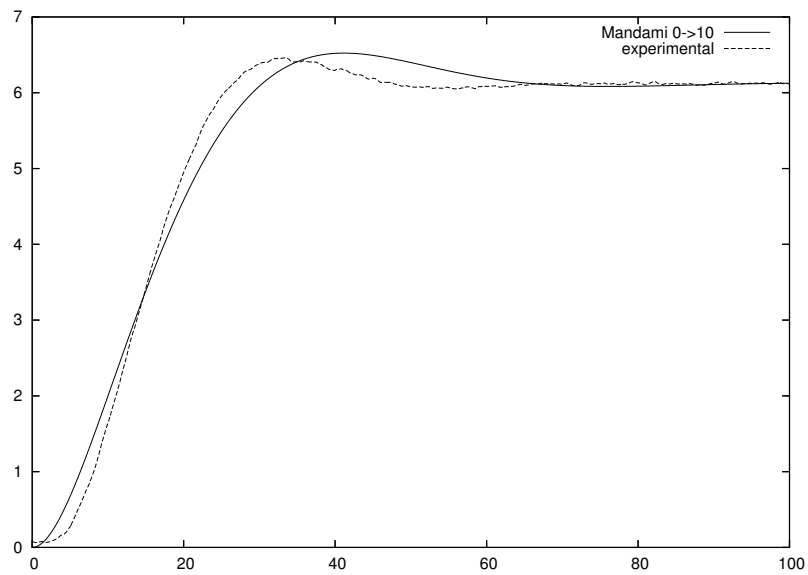
El modelo de Mamdani que se ha formulado como aproximación al sistema no lineal está dado por las reglas:

$$\begin{array}{ll} \text{SI } x \text{ ES } 0 & \text{ENTONCES } \dot{\mathbf{x}} \text{ ES } \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 u \\ \text{SI } x \text{ ES } 6,18 & \text{ENTONCES } \dot{\mathbf{x}} \text{ ES } \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 u \end{array}$$

siendo \mathbf{A}_i y \mathbf{B}_i las matrices del modelo en variables de estado dado en la sección 2.2.8. Tener en cuenta que en la segunda expresión los valores de u son incrementales respecto a su valor de equilibrio $u_0 = 10$. Las funciones de pertenencia son triangulares.

Una vez escrito el simulador correspondiente se somete al modelo a la siguiente serie de escalones en la entrada para comparar la dinámica del sistema borroso de *Mamdani* con la del sistema real.

- $u = 0 \rightarrow 1$ (figura 3.35)
 - El sistema borroso prevé una ganancia sensiblemente menor que la real.
 - La dinámica del sistema borroso es ligeramente más lenta con los mismos tiempos de subida y pico.
 - El sistema es sobreamortiguado en ambos casos.
- $u = 0 \rightarrow 10$ (figura 3.36)
 - El sistema prevé el valor del régimen permanente perfectamente.
 - El sistema borroso es más lento que el sistema real: tiene tiempos de establecimiento y de subida mayores.
 - El sistema de Takagi-Sugeno prevé un sistema oscilatorio con la misma cantidad de sobreoscilación, pero ligeramente más tarde.
- $u = 10 \rightarrow 9$ (figura 3.37)
 - El sistema borroso se equivoca ligeramente en el régimen permanente (sobrestima la ganancia).
 - La dinámica es ligeramente más rápida alrededor del arranque y tiene tiempos de subida y pico mayores.
 - El sistema borroso sobreoscila en la misma medida que el sistema real, pero un poco más tarde.
- $u = 10 \rightarrow 0$ (figura 3.38)
 - El sistema borroso llega al mismo valor de régimen permanente.
 - Es ligeramente más rápido que el sistema real.
 - Tiene el mismo carácter sobreamortiguado que el real.

Figura 3.35: Escalón $u = 0 \rightarrow 1$ para Mamdani triangularesFigura 3.36: Escalón $u = 0 \rightarrow 10$ para Mamdani triangulares

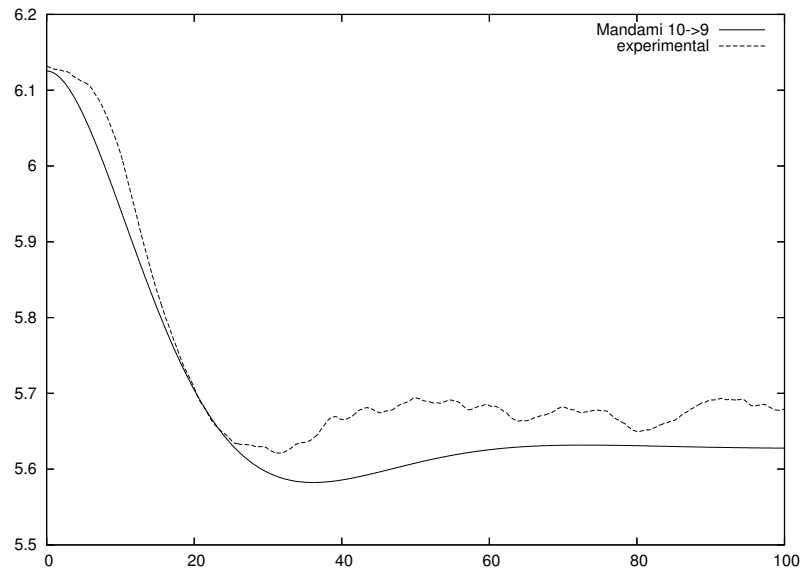


Figura 3.37: Escalón $u = 10 \rightarrow 9$ para Mamdani triangulares

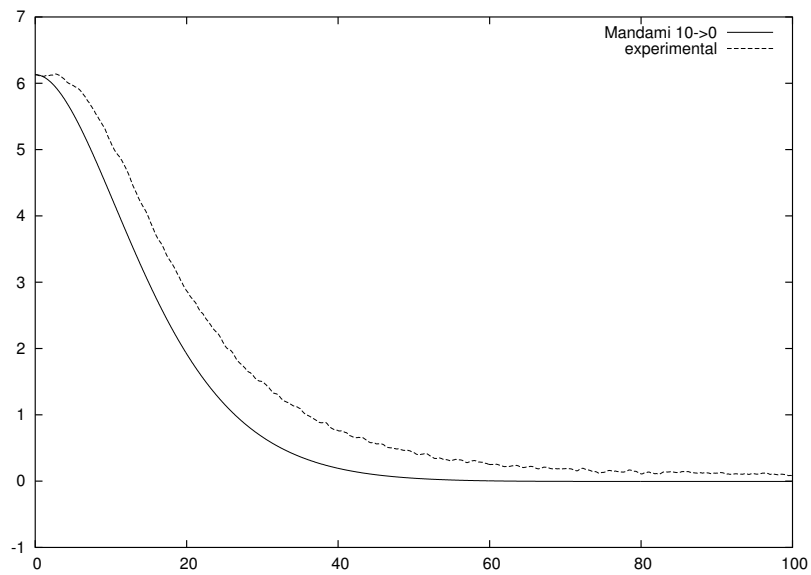


Figura 3.38: Escalón $u = 10 \rightarrow 0$ para Mamdani triangulares

3.2.4. Modelo borroso de *Mamdani* con funciones de pertenencia polinómicas de tercer orden.

Esta sección presenta los resultados obtenidos al utilizar un modelo borroso de *Mamdani* con funciones de pertenencia polinómicas de tercer orden para aproximar la dinámica del sistema.

El modelo de Mamdani se formula del mismo modo que en la sección 3.2.3, pero en este caso las funciones de pertenencia son las siguientes:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -0,00125x^3 + 0,00627x^2 - 0,15263x + 1 & 0 \leq x \leq 6,18 \\ 0 & x > 6,18 \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,00125x^3 - 0,00627x^2 + 0,15263x & 0 \leq x \leq 6,18 \\ 1 & x > 6,18 \end{cases} \quad (3.44)$$

Se somete al modelo a la siguiente serie de escalones en la entrada para comparar su dinámica con la del sistema real.

- $u = 0 \rightarrow 1$ (figura 3.39)
 - El sistema borroso prevé el régimen permanente del sistema real a la perfección.
 - La aproximación tiene la misma dinámica que el sistema real.
 - El sistema de Mamdani, al igual que el sistema real, no sobreoscila.
- $u = 0 \rightarrow 10$ (figura 3.40)
 - El sistema borroso clava la ganancia del sistema real.
 - El sistema borroso es ligeramente más rápido entorno al primer punto de linealización (sistema lineal lento) y ligeramente más lento en cuanto llega hasta el segundo punto de linealización (sistema lineal rápido).
 - El sistema borroso sobreoscila un poco más y un poco más tarde.
- $u = 10 \rightarrow 9$ (figura 3.41)
 - El sistema borroso tiene la misma ganancia que el sistema real.
 - El sistema de Mamdani sigue fielmente al real con un ligero retraso.
 - Se obtiene la misma cantidad de sobreoscilación en aproximadamente el mismo instante.
- $u = 10 \rightarrow 0$ (figura 3.42)
 - El sistema borroso prevé el valor de régimen con precisión.
 - El sistema de Mamdani es más rápido que el real.
 - Ninguno de los dos sistemas sobreoscila.

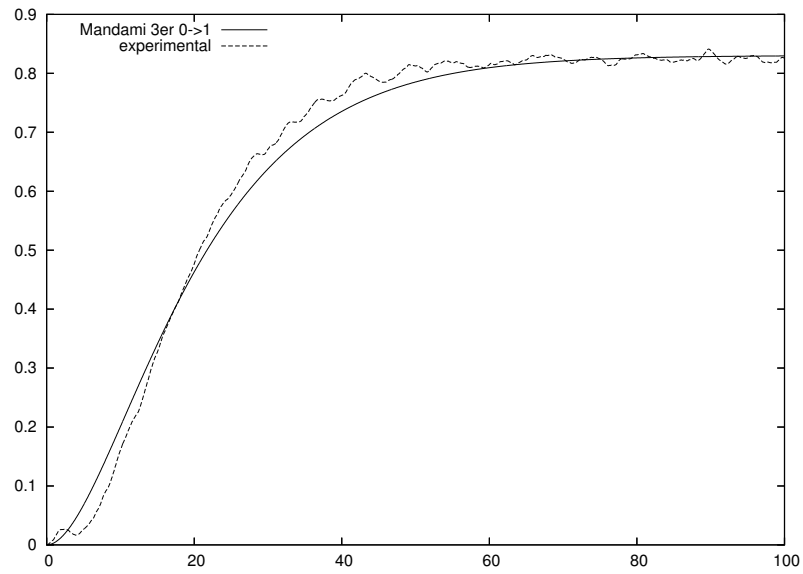


Figura 3.39: Escalón $u = 0 \rightarrow 1$ para Mamdani tercer orden

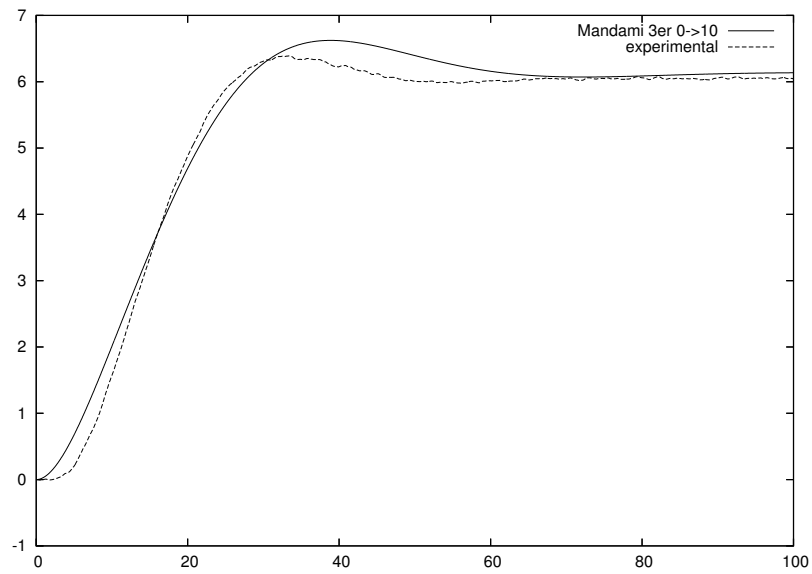
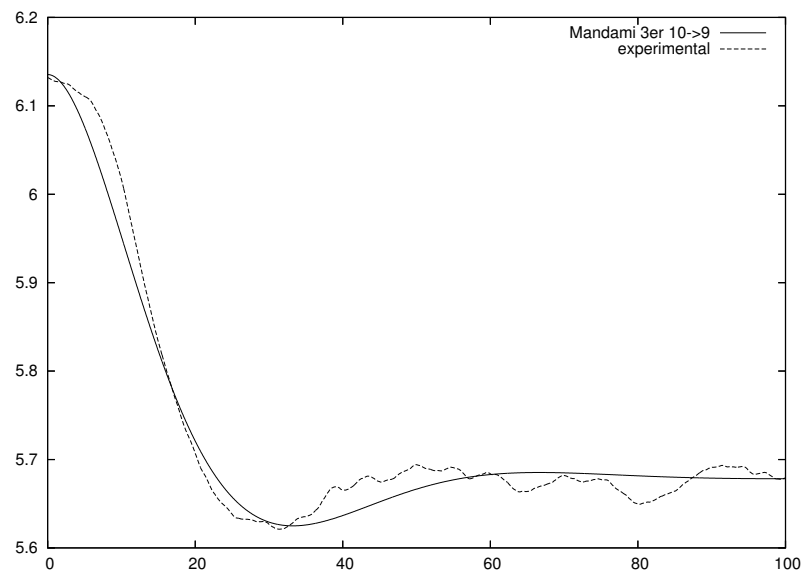
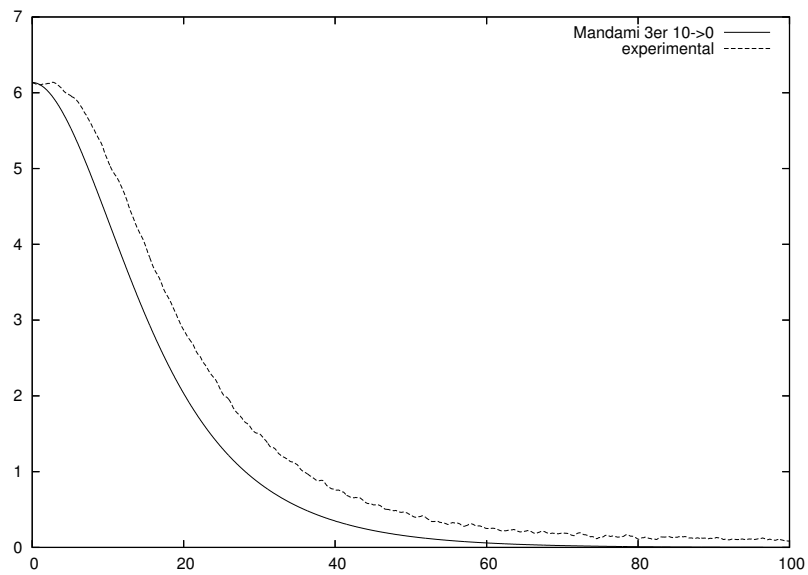


Figura 3.40: Escalón $u = 0 \rightarrow 10$ para Mamdani tercer orden

Figura 3.41: Escalón $u = 10 \rightarrow 9$ para Mamdani tercer ordenFigura 3.42: Escalón $u = 10 \rightarrow 0$ para Mamdani tercer orden

3.3. Interpretación gráfica de los resultados

Las ecuaciones diferenciales que representan tanto al sistema térmico no lineal como a los modelos identificados son en general de esta forma:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + ku \quad (3.45)$$

Esta estructura permite dibujar la dinámica del sistema como una superficie de tipo $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ que se desplaza según el eje z cuando se modifica la entrada al sistema, pero siempre manteniendo su forma.

En esta sección se explora la posibilidad de poder comparar a simple vista características dinámicas de los modelos mediante la observación de las superficies que describen sus ecuaciones diferenciales.

3.3.1. Metodología

Para realizar las representaciones en tres dimensiones se hace uso de *Blender 3D*, que es una aplicación infográfica libre multiplataforma corriendo en este caso sobre sistemas GNU/Linux. Para dibujar las gráficas se ha programado un script en *Python*.² Este script se ha donado a la comunidad de desarrolladores y usuarios de *Blender 3D* para que lo usen libremente.

En los apartados siguientes se muestran las superficies que representan a cada uno de los sistemas que se han ido confeccionando en la sección 3.2. Las superficies representan la dinámica del sistema térmico no lineal dado un escalón de valor final 0.

²*Python* es un lenguaje libre orientado a objetos multiplataforma de muy alto nivel (www.python.org)

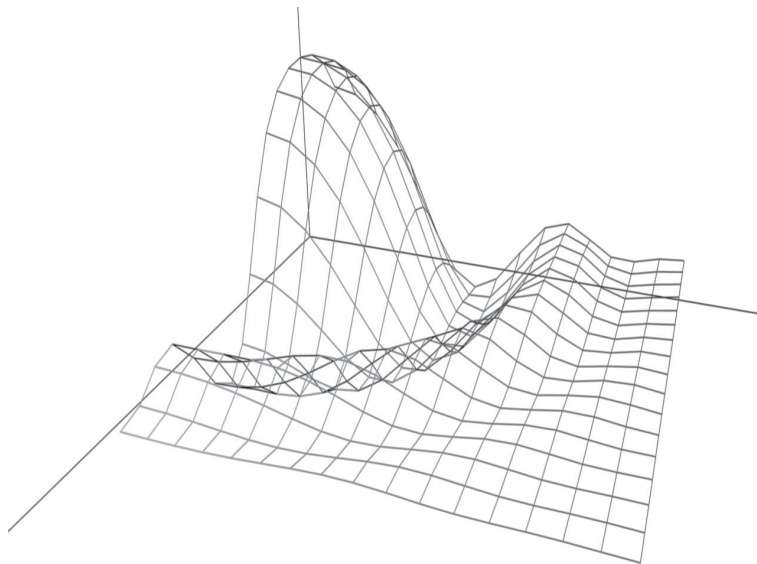


Figura 3.43: Ejemplo de empleo de *Blender 3D* para representar superficies

3.3.2. Sistema no lineal

La superficie mostrada en la figura 3.44 representa la aproximación a la ecuación diferencial del sistema físico realimentado. Esta representación se ha realizado utilizando las ecuaciones diferenciales del modelo de tercer orden que se extrajeron de la maqueta en la sección 2.2.2 y realimentando con el cuadrado de la salida, en una expresión parecida a la 3.46.

$$\ddot{x} = r - (x + ax^2 + b\dot{x}) \quad (3.46)$$

Se aprecia en la figura 3.45 que la no linealidad se encuentra en la dependencia con x y no en la dependencia con \dot{x}

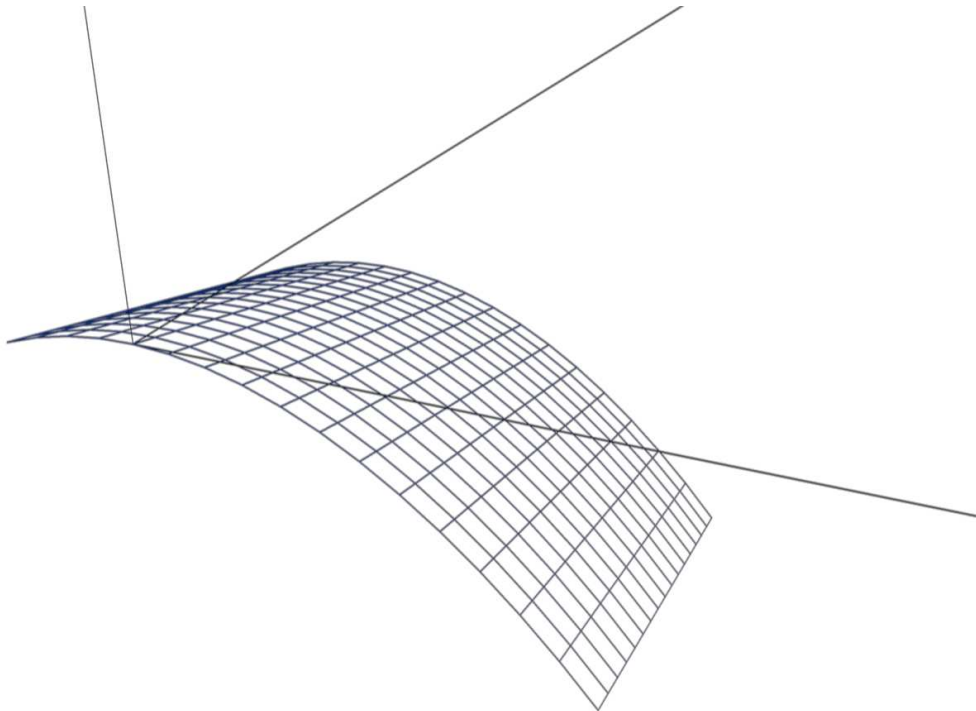


Figura 3.44: Superficie del sistema no lineal

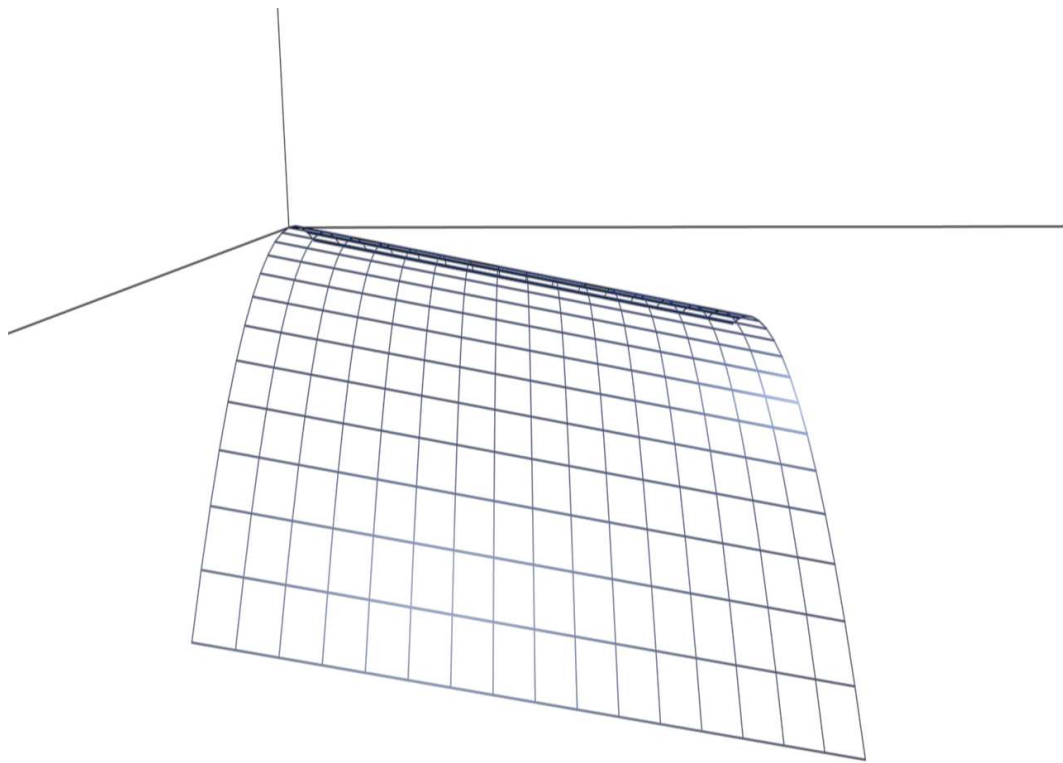


Figura 3.45: Dependencia con la derivada del estado

3.3.3. Sistemas lineales

Los dos sistemas lineales que se extrajeron en la sección 2.2.7 se pueden representar también como planos tangentes a la superficie del sistema no lineal como puede observarse en la figura 3.46.

Puede anticiparse que la dependencia de la dinámica del sistema no lineal con la derivada del estado implica una cierta inclinación de la superficie en el sentido \dot{x} y esto se refleja también en que los sistemas lineales adquieren esa orientación en su punto de linealización (ver figura 3.47). Esto unido a que *la dependencia del sistema real es lineal con \dot{x}* significa que los sistemas lineales aproximan muy bien la dependencia de la dinámica con \dot{x} pero fallan en su aproximación cuando la primera variable de estado se aleja del punto de linealización. Esta afirmación depende del carácter de la no linealidad del sistema físico, más concretamente de la curvatura de las ecuaciones diferenciales en el punto de linealización.

Es por este motivo por el que puede observarse en la figura 3.48 que los sistemas lineales son tangentes a la superficie no lineal no solo en un punto, como era de esperar, *sino a lo largo de toda una recta*.

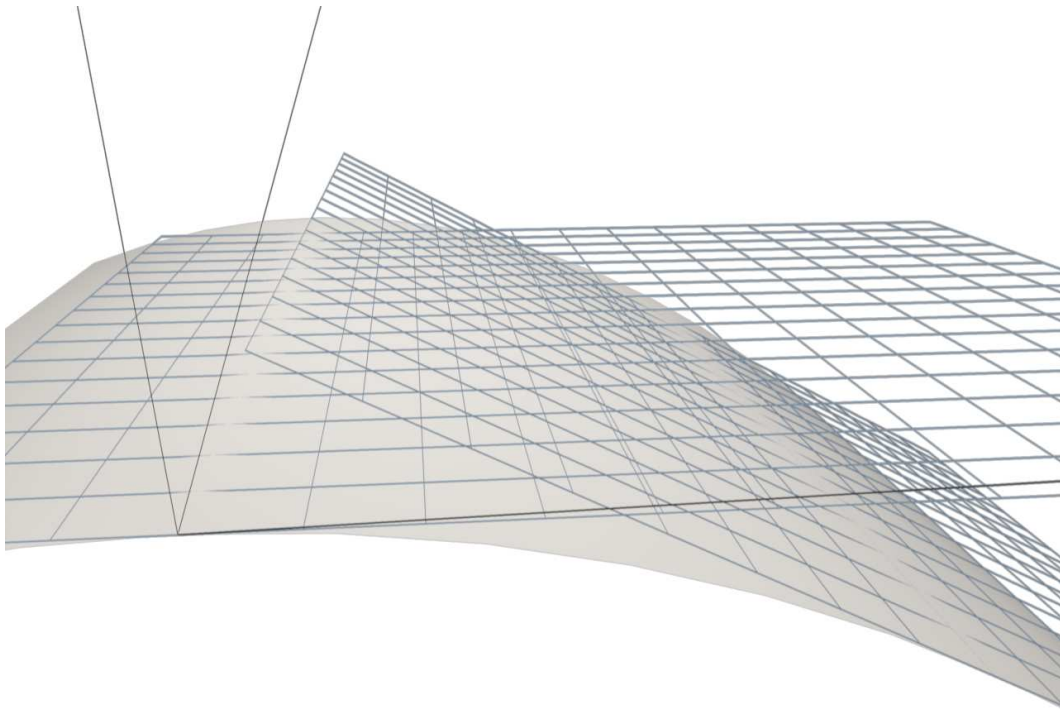


Figura 3.46: Superficies de los sistemas lineales

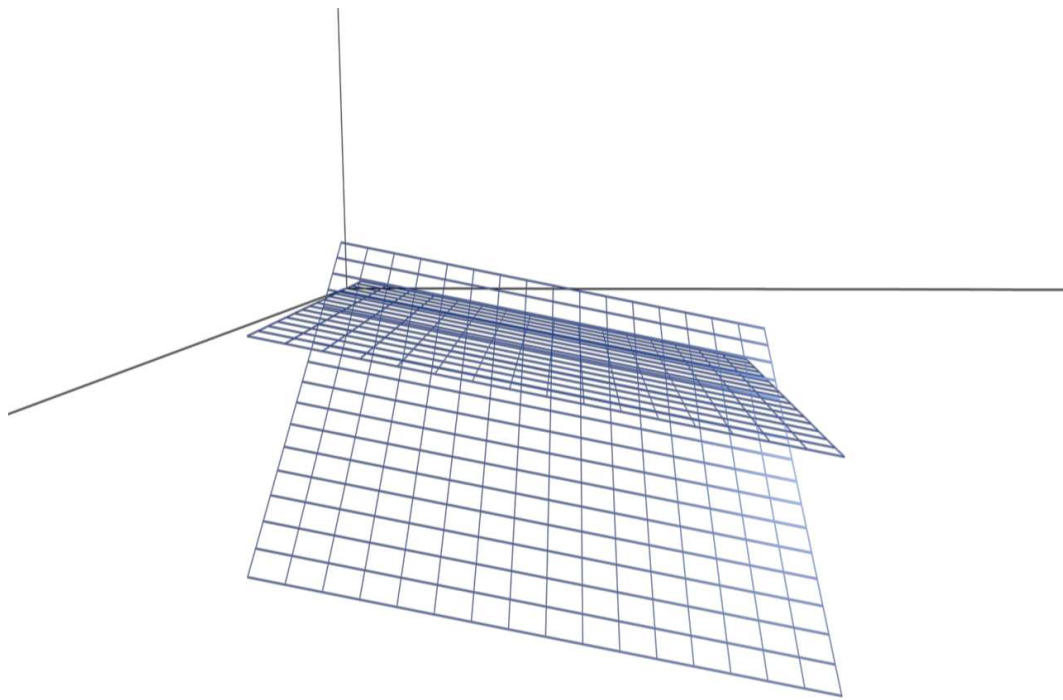


Figura 3.47: Dependencia con la derivada del estado de los sistemas lineales

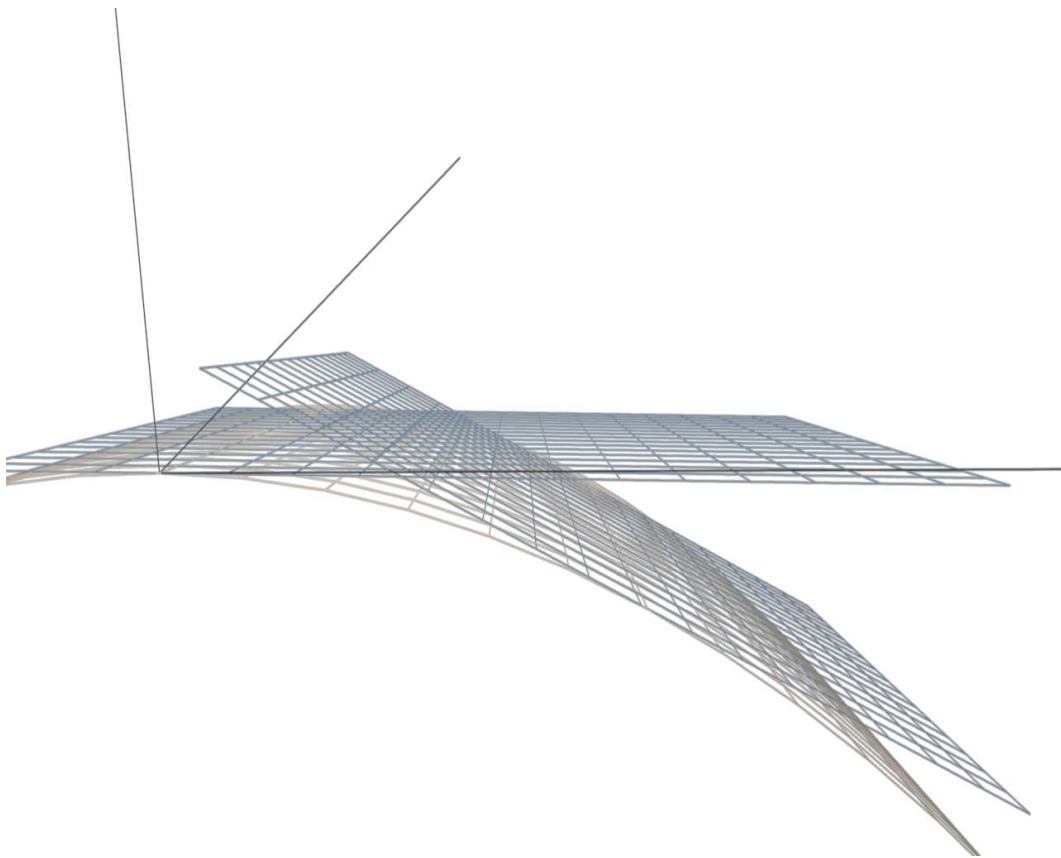


Figura 3.48: Tangencia a la superficie no lineal

3.3.4. Sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia triangulares

La superficie que representa la ecuación diferencial del sistema borroso puede verse en la figura 3.49.

Debe entenderse que de este modo los modelos borrosos están formulados según reglas cuyas premisas contienen únicamente referencias a x , por lo que en el caso de los sistemas borrosos de tipo Mamdani *las consecuencias no dependerán de \dot{x}* y naturalmente sus superficies -como puede verse en la figura 3.50- tampoco.

Como consecuencia la aproximación que se realiza a la dinámica del sistema no lineal es bastante pobre: no se ajusta bien en la dependencia con x y es insensible a las variaciones de \dot{x} (ver figura 3.51).

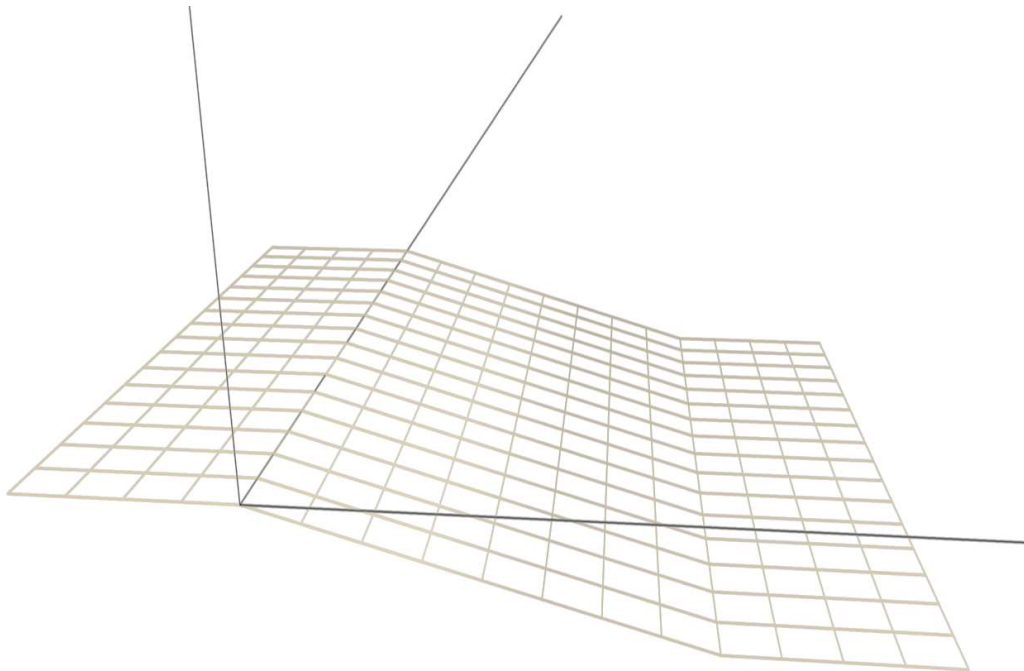


Figura 3.49: Superficie del sistema borroso de Mamdani

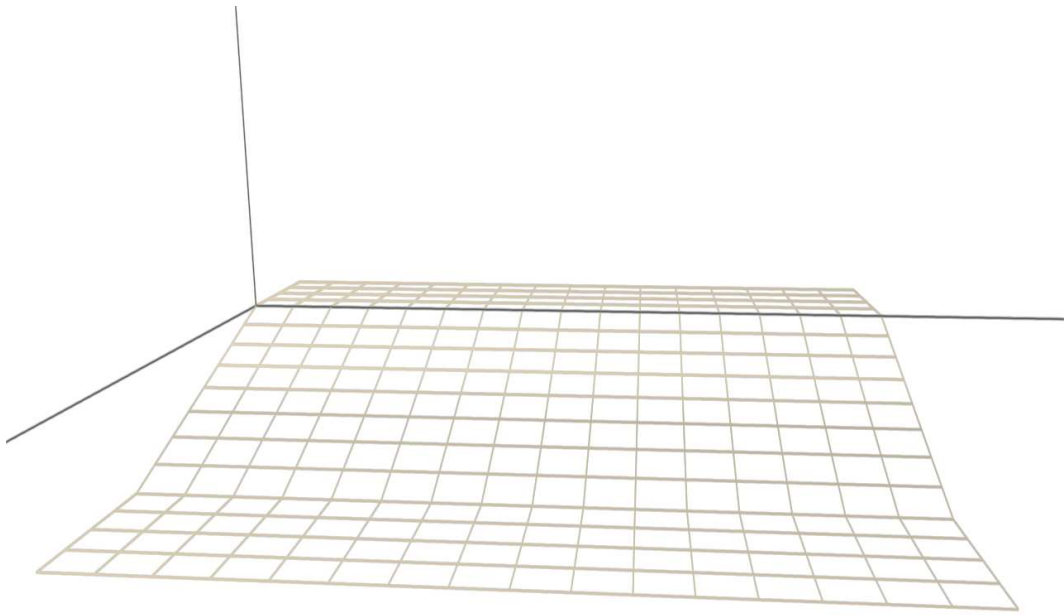


Figura 3.50: No dependencia de la derivada del estado

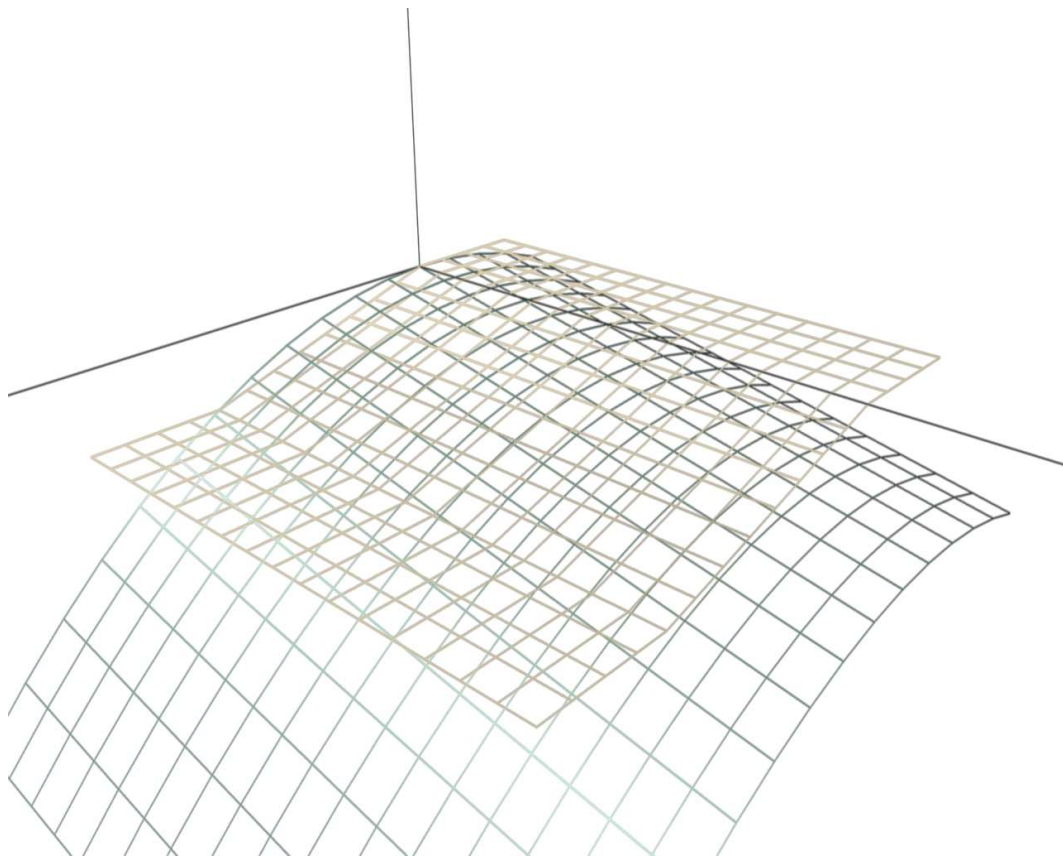


Figura 3.51: Aproximación al no lineal del MA1

3.3.5. Sistema borroso de Mamdani con funciones polinómicas de tercer grado

La superficie que representa la ecuación diferencial del sistema borroso puede verse en la figura 3.52.

Para la aproximación borrosa del modelo de Mamdani con funciones de pertenencia polinómicas de tercer grado existe el mismo problema que en la formulación que se hizo en 3.3.4, esto es, que no ha sido posible formular reglas en puntos donde la derivada de la primera variable de estado fuera no nula. La consecuencia puede verse en la figura 3.54, y es que la superficie de la aproximación borrosa no depende de la segunda variable de estado \dot{x} .

El resultado es que la aproximación es perfecta en el rango entre los puntos maestros donde se formulan las reglas para la primera variable de estado, pero es pobre en la dependencia con \dot{x} (ver figura 3.54).

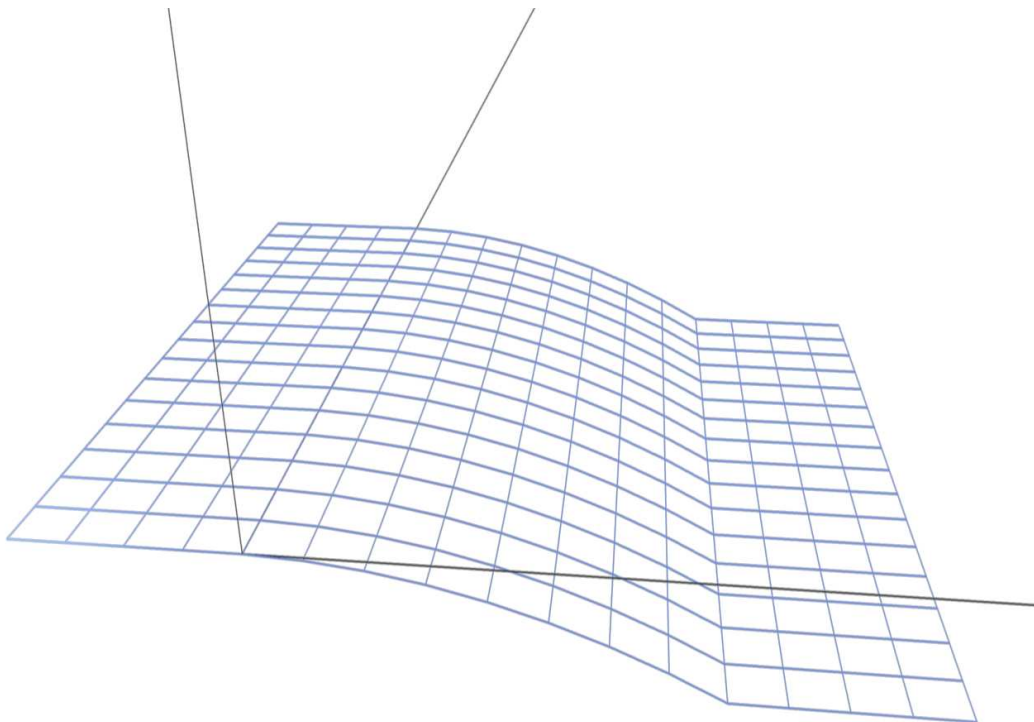


Figura 3.52: Superficie del sistema borroso de Mamdani con funciones de pertenencia polinómicas

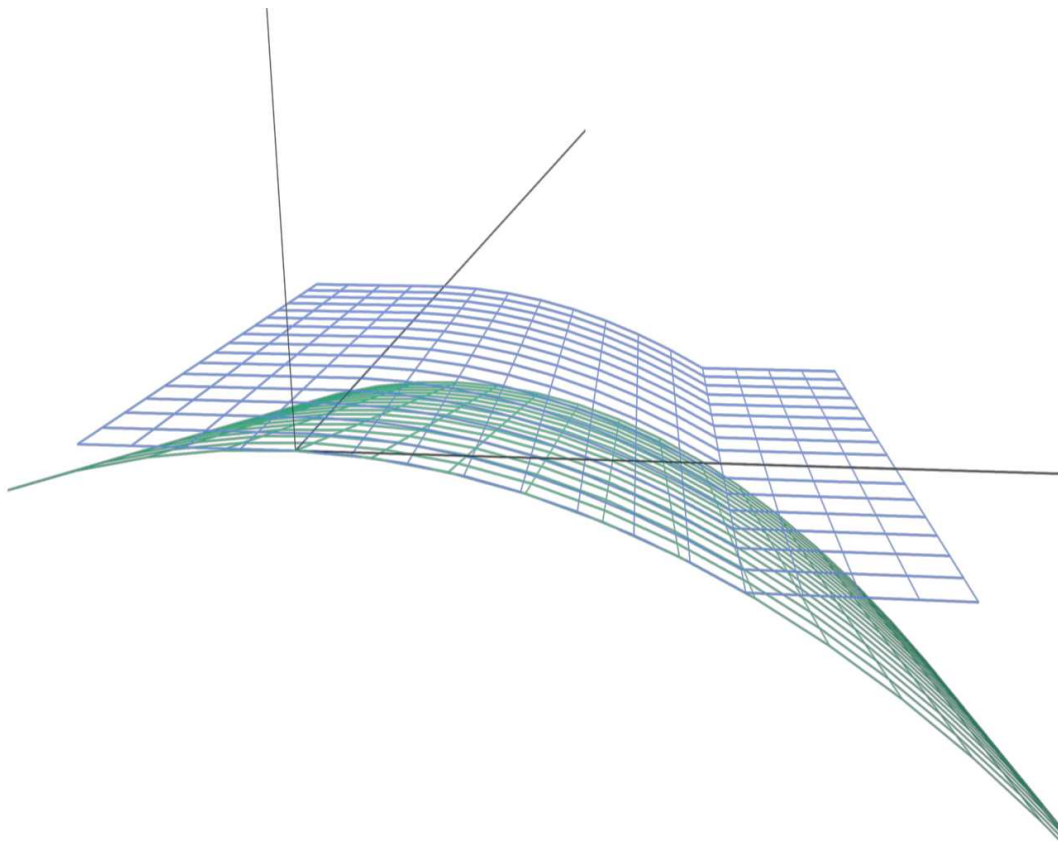


Figura 3.53: Aproximación al no lineal del MA3

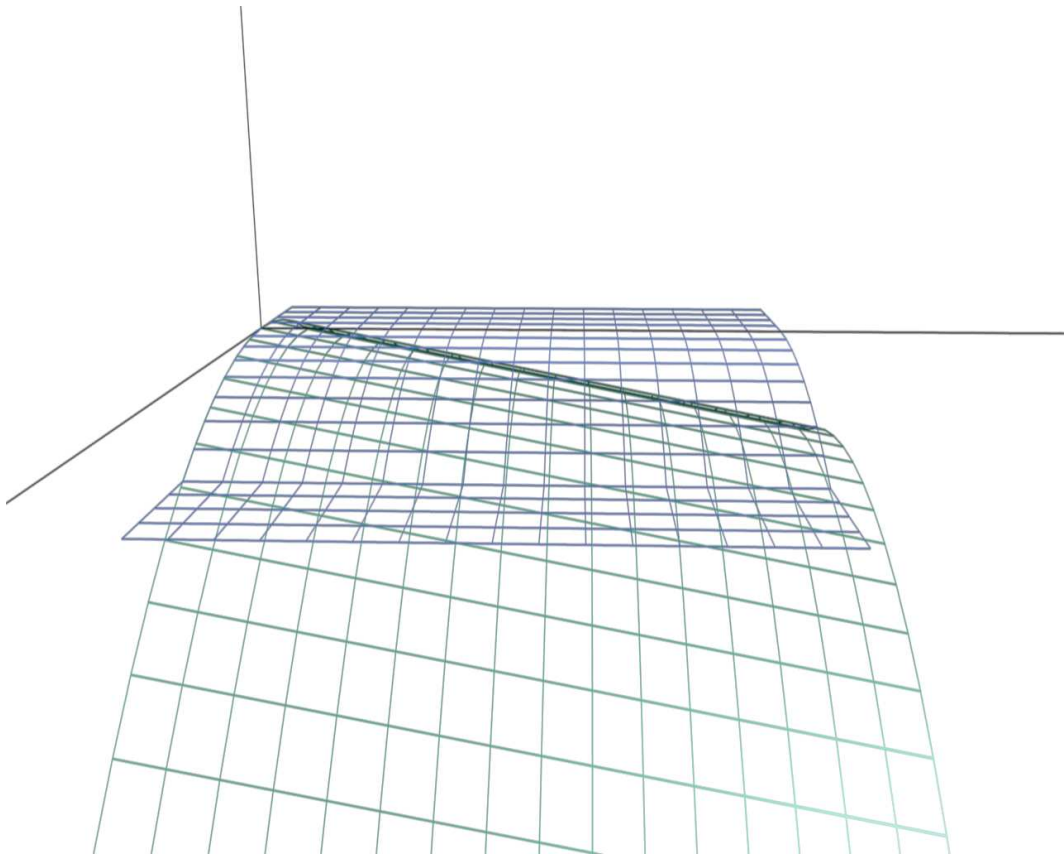


Figura 3.54: No dependencia de la derivada del estado

3.3.6. Sistema borroso de Takagi-Sugeno

La superficie que representa la ecuación diferencial del sistema borroso de Takagi-Sugeno puede verse en la figura 3.55.

Para la aproximación borrosa de Takagi-Sugeno aparece el mismo problema que en los apartados anteriores, esto es, que las premisas de las reglas hacen referencia únicamente a la primera variable de estado. Pero en esta ocasión *las consecuencias de las reglas sí que contienen la segunda variable de estado* (recordar que las consecuencias son sistemas lineales de segundo orden).

Ahora bien, si la ecuación diferencial real hubiera tenido dependencia no lineal de la segunda variable de estado, que no es el caso, el modelo borroso de Takagi-Sugeno no hubiera podido recogerla y por tanto en la simulación se alejaría más del comportamiento real.

Todo esto puede observarse en la figura 3.56.

El resultado es que la aproximación es buena cerca de los puntos de formulación de las reglas, bastante pobre en los puntos medios y aceptable en los puntos del espacio de estado que tienen segunda variable de estado no nula (ver figura 3.57).

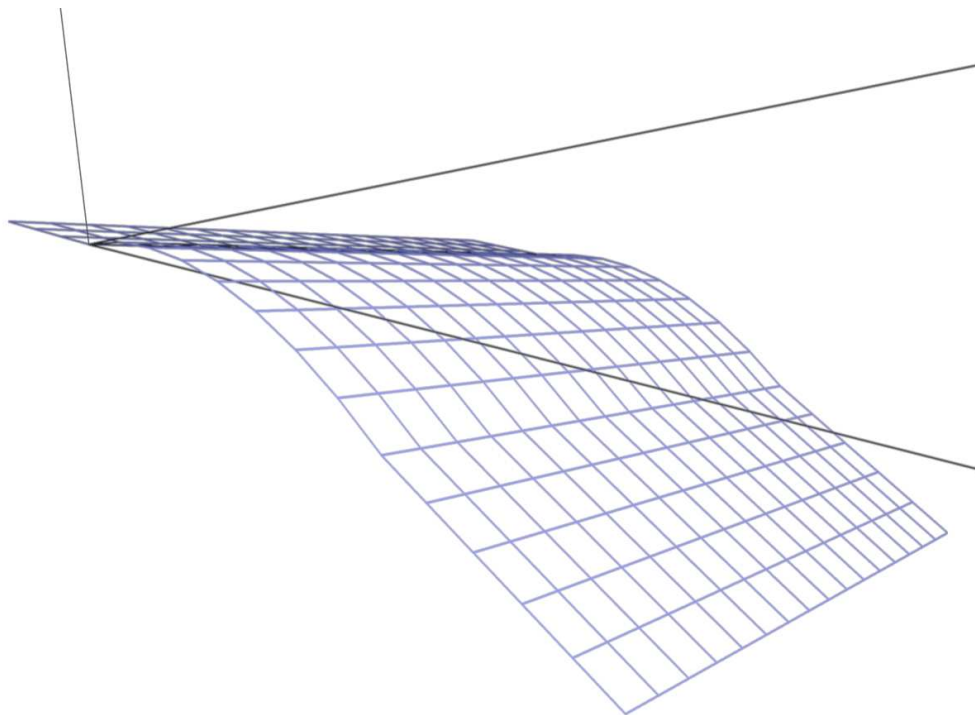


Figura 3.55: Superficie del sistema borroso de Takagi-Sugeno

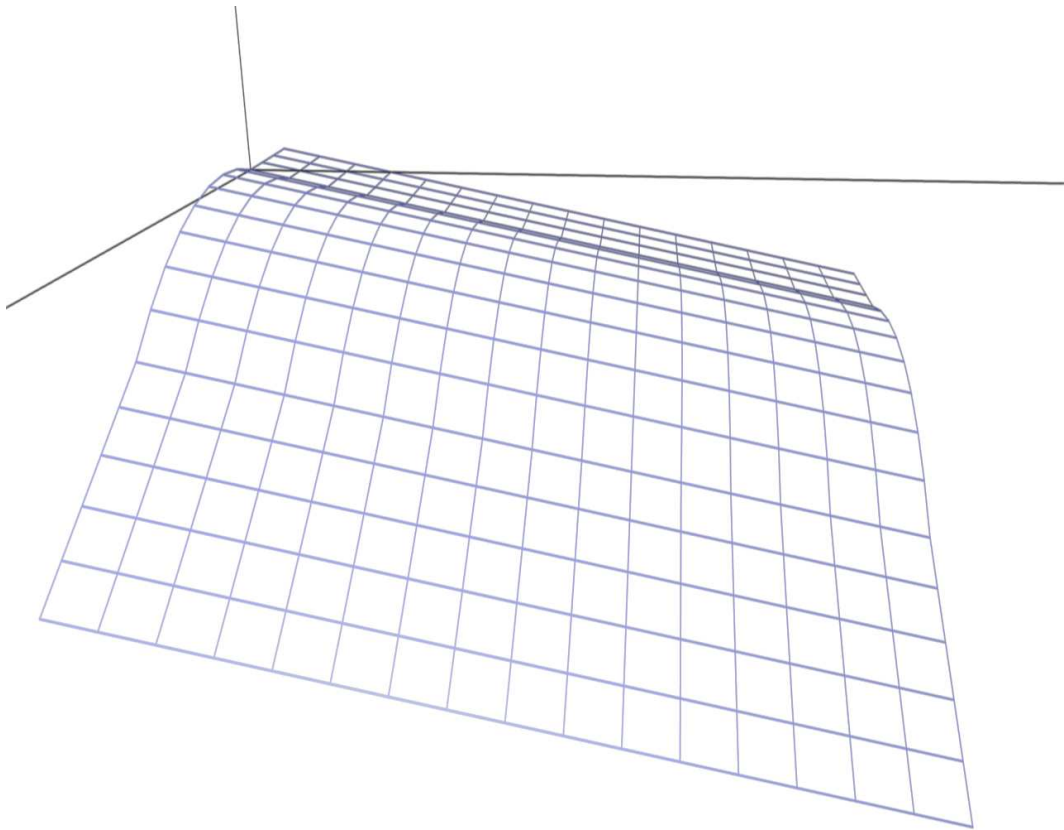


Figura 3.56: Dependencia de la derivada del estado

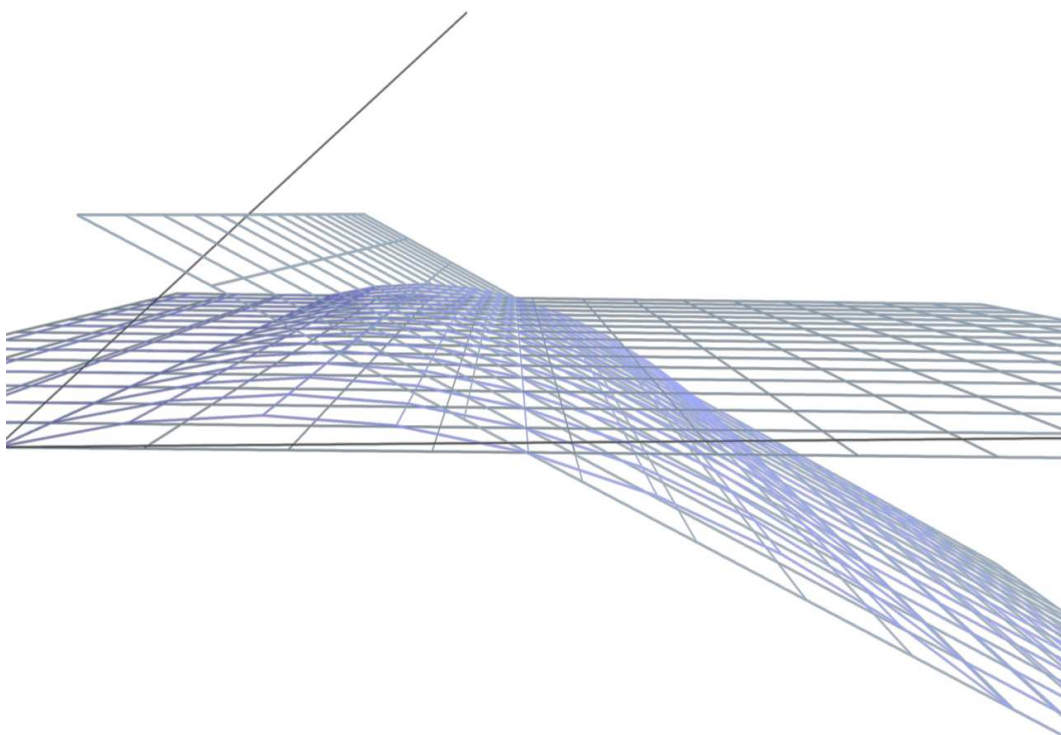


Figura 3.57: Aproximación al sistema no lineal del TS

3.4. Conclusiones

- Es posible predecir algunas características de la dinámica de los sistemas borrosos en comparación con los sistemas no lineales, lineales u otros borrosos entre sí atendiendo a la forma geométrica de sus ecuaciones diferenciales.
- De entre los modelos borrosos formulados puede decirse que en general los modelos de Takagi-Sugeno interpolan mejor las características dinámicas y que los modelos de Mamdani ajustan mejor las características estáticas.
- Los modelos de Mamdani formulados ignoran la dependencia de la dinámica con la derivada del estado. Así, ajustarán bien la dinámica del sistema solo cuando el estado no evolucione demasiado rápido y la ecuación diferencial no dependa fuertemente de la derivada del estado.
- El modelo de Takagi-Sugeno es capaz de recoger la dependencia de la dinámica con la derivada del estado, pero falla en las predicciones cuando la dependencia es no lineal aunque en menor medida que el sistema de Mamdani.

Capítulo 4

Conclusiones y Propuestas Para Futuros Desarrollos

4.1. Conclusiones

El objetivo global del proyecto es poner en juego distintas metodologías para la confección de modelos borrosos de sistemas no lineales y realizar un análisis dinámico comparativo entre ellas en términos de precisión en el régimen transitorio y en el régimen permanente.

El proyecto consta de tres áreas diferenciadas que se superaron secuencialmente:

- En el capítulo 1 se presentó una revisión sintética de las herramientas matemáticas necesarias para afrontar las etapas posteriores del proyecto. Se desarrolló un ejemplo de controlador borroso como aplicación de la teoría.
- En el capítulo 2 se extrajeron modelos clásicos (no borrosos) de dos sistemas físicos que se encuentran en las instalaciones del laboratorio de automática comenzando con el estudio de una maqueta hidráulica:
 - Se extrajeron modelos para cada una de las partes: bomba, sensor de altura y depósito.
 - Para el depósito se siguieron dos vías de modelado: la primera, de corte teórico, se centró en identificar los parámetros de las ecuaciones diferenciales que nos proporciona la Mecánica de Fluidos. Mediante la segunda se infiere la estructura de la ecuación diferencial a través de experimentos.
 - Al escribir los simuladores para los modelos y comparar su comportamiento se eligió al segundo como el más representativo de la dinámica del tanque.
 - Se desechó esta vía de avance pues el modelo extraído de la maqueta es básicamente un sistema de dinámica afín que contiene no linealidades de tipo “duro” (saturaciones, zona muerta, retardos) y esto lo hace poco apropiado para aplicar sobre él las técnicas de modelado borroso.

Más tarde se pasó al estudio de la maqueta térmica:

- Se llevó a cabo un proceso de identificación de la maqueta para obtener un modelo. Los sistemas de primer orden resultaron incapaces de representar la dinámica del

sistema y finalmente se proporcionó un único modelo lineal de tercer orden que representa fielmente al sistema.

- Dado que un sistema lineal tampoco es útil para poner en juego las técnicas de modelado borroso se estudiaron las posibles vías para transformar el sistema y conseguir un sistema de dinámica no lineal. Se estudiaron de forma teórica las consecuencias de aplicar una realimentación no lineal primero a sistemas lineales de primer orden y después a sistemas lineales de órdenes superiores. Se llegó a conclusiones sobre el comportamiento en régimen permanente y en régimen transitorio para sistemas de primer orden realimentados y se demostró que las conclusiones sobre el régimen permanente son generalizables a sistemas de orden superior (no así los resultados sobre la dinámica).
 - Se implementó la no linealidad mediante software en el driver de la tarjeta de adquisición de datos. El método es transparente para las aplicaciones.
 - Se escribió un simulador para recrear los efectos de la realimentación no lineal en el modelo lineal de tercer orden extraído de la maqueta. Se experimentó y tanto las predicciones del simulador sobre la respuesta en régimen transitorio y en régimen permanente como las predicciones obtenidas de forma teórica sobre los sistemas lineales de orden superior se mostraron ciertas.
 - Se comprobó que la dinámica del nuevo sistema realimentado es no lineal y se obtuvieron sendos sistemas lineales aproximantes en los extremos del rango de la variable de salida. Uno de ellos resultó de carácter sobreamortiguado y el otro de carácter subamortiguado, lo que muestra que se tuvo éxito en el diseño de la realimentación.
 - Se dieron los modelos en variables de estado de los dos sistemas anteriores para su uso posterior en la síntesis de los modelos borrosos y la programación de los simuladores en el capítulo posterior.
- El capítulo 3 contiene la formulación de los sistemas borrosos y el análisis dinámico comparativo entre ellos.
 - Se realizó un estudio teórico sobre la síntesis de modelos borrosos y sus propiedades dinámicas aplicado a sistemas de primer orden. Se ilustró el contenido con un ejemplo de tipo mecánico para el que se extrajeron modelos lineales y borrosos con el objeto de comparar la bondad del ajuste de cada uno en relación con la dinámica original. Para ello se programaron tantos simuladores como modelos del sistema.
 - Se escribieron los modelos borrosos para el sistema realimentado y se realizó el análisis comparativo de la respuesta ante escalón de cada uno contra la respuesta de la maqueta en términos de régimen permanente y régimen transitorio.
 - Para justificar los resultados encontrados se intentó seguir un paralelismo entre los razonamientos antes presentados sobre sistemas lineales en primer orden pero traídos ahora a sistemas de segundo orden. Se presentó la dificultad de no poder utilizar representaciones planas y se hizo uso de herramientas infográficas para explicar las diferencias entre las superficies de los modelos.

4.2. Propuestas para futuros desarrollos

- Generalizar y formalizar las ideas expresadas respecto al análisis dinámico de los sistemas borrosos de primer orden en el capítulo 3.
- Intentar generalizar lo anterior a sistemas de segundo orden, donde todavía existe la posibilidad de utilizar argumentos geométricos.
- Encontrar una metodología experimental para extraer modelos del sistema no lineal en puntos de no equilibrio y así poder formular las reglas en más puntos y con premisas más complejas para lograr un mejor ajuste.
- Una vez encontrada la metodología anterior, formular nuevos modelos y estudiar su aproximación a la dinámica del sistema no lineal.
- Comparar la aproximación de la dinámica del sistema no lineal por los nuevos modelos *respecto de los escritos en este proyecto*.
- Quizá la más importante vía que abre esta memoria es la de poder utilizar los diferentes modelos confeccionados en esta memoria para investigar metodologías de síntesis de controladores borrosos basadas en modelos borrosos.

Apéndice A

Herramientas y Software Desarrollado

Este apéndice presenta la información sobre las herramientas informáticas que fueron usadas para la realización del proyecto.

La primera parte enumera los sistemas operativos y las aplicaciones utilizadas para la realización del proyecto y las secciones siguientes presentan las aplicaciones que se han desarrollado para la ocasión y proporcionan información suficiente para su uso posterior.

A.1. Herramientas software

Todos los trabajos del proyecto se han realizado sobre ordenadores personales convencionales con sistemas operativos GNU/Linux (de tipo UNIX) usando Software Libre. Al comienzo del proyecto esto fue problemático porque no se encontraron drivers para los dispositivos ni aplicaciones de captura de datos, pero junto con el proyecto se ha desarrollado software que suple estas carencias y que acompaña a la memoria en soporte digital CDRom.

A.1.1. Sistemas operativos

La elección de utilizar sistemas operativos libres se tomó desde el principio del proyecto aún cuando no se tenía experiencia en sistemas de tipo UNIX. Fue necesario desarrollar bastante software para satisfacer las necesidades de aplicaciones para avanzar en el proyecto.

Mandrake 9.x - 10.0: sobre este sistema operativo se programaron todos los simuladores y las interfaces gráficas. También gran parte del trabajo de programación del driver se realizó sobre este sistema operativo.

Debian: en su versión inestable, para componer este documento en \LaTeX .

Knoppix: basada en Debian, de tipo *live* para poder utilizar la tarjeta capturadora en los ordenadores del laboratorio dado que no tenían instalación de GNU/Linux.

A.1.2. Aplicaciones

Se han utilizado muchas aplicaciones en el desarrollo del proyecto para hacer tareas como ajustar modelos, filtrar señales, diseñar interfaces gráficas para controladores, etc.

gnuplot: es una aplicación para generar gráficas postscript, trabaja con matemática simbólica y soporta terminales texto, gráficos y muchos tipos distintos de impresoras. Genera gráficos bidimensionales y tridimensionales. Su capacidad de prestar interfaz mediante tuberías a programas en C ha sido utilizada en alguna ocasión.

octave: es una aplicación clónica a *matlab*, pero libre y multiplataforma. Admite una sintaxis similar y alcanza un alto grado de compatibilidad. Hace uso de *gnuplot* para dibujar gráficos.

L^AT_EX: implementación Web2C 7.4.5 para sistemas GNU/Linux basada en T_EX 3.14159.

kile: aplicación libre *front-end* para L^AT_EX de la suite de escritorio Kde.

Blender3D: aplicación libre para modelado y render en tres dimensiones. Se ha utilizado para generar las figuras tridimensionales, aunque la carencia de soporte para este uso ha motivado la programación de algunas extensiones a la aplicación en el lenguaje **Python**.

idle: entorno de programación sencillo para **Python**.

kdevelop: es un entorno de desarrollo en sistemas operativos GNU/Linux para multitud de lenguajes de programación entre los que se encuentran **C**, **C++** y **Python**.

A.1.3. Lenguajes de programación

Los lenguajes de programación elegidos para desarrollar el software necesario para el proyecto fueron **C**, **C++** y **Python**. En **C** se programó el driver para la tarjeta de adquisición de datos que se detalla en A.2 y algunas herramientas para el filtrado de señales y ajuste y optimización por mínimos cuadrados. En **C++** se desarrollaron las aplicaciones con interfaz de usuario, algunos prototipos de controladores lineales y borrosos y la aplicación de captura de señales que se presenta en A.4. En **Python** se desarrollaron las extensiones a *Blender 3D* que se presentan en la sección A.5 y que más tarde se liberaron para uso público en la red.

A.2. Driver para la tarjeta ADLINK

Para interactuar con las maquetas, realizar la captura de datos de las maquetas y cerrar los bucles de control se utilizó un ordenador personal con microprocesador Intel Pentium II a 350 MHz, dotado de una tarjeta de adquisición de datos 8316 NuDAQ de ADLINK. Desgraciadamente, el fabricante de la tarjeta no proporciona controladores para sistemas operativos UNIX, de modo que se emprendió la tarea de escribir un driver para la tarjeta de adquisición de datos con un sistema GNU/Linux con núcleo de la serie 2.4 como plataforma objetivo.

Por suerte el fabricante de la tarjeta la acompaña de un pequeño manual donde explica su funcionamiento interno y la API (*application programming interface*) de los drivers que se escribieron en su día para sistemas operativos Microsoft Windows. Esta valiosa información sobre la forma en la que la tarjeta lleva a cabo las conversiones analógico/digital (AD) y digital/analógico (DA) fue suficiente para poder escribir el driver “from scratch” para sistemas GNU/Linux.

Esta sección no pretende explicar el funcionamiento de la electrónica de la tarjeta [1] ni tampoco cómo programar un driver para la tarjeta [13], sino documentar la manera en la que

se compila el driver para un núcleo objetivo, cómo preparar al sistema operativo para generar el nuevo archivo de dispositivo y cómo cargar y descargar el driver.

Este driver ha sido programado intentando ser respetuoso con el núcleo, por lo que se ha guardado cuidado a la hora de tomar los recursos del sistema operativo (direcciones E/S, memoria del núcleo) y siempre se comprueba la disponibilidad de estos antes de reservarlos. A pesar de lo dicho arriba, no se da ninguna garantía sobre el driver y se aconseja su empleo únicamente para uso educacional. Leer por favor la sección sobre licencias A.6.

A.2.1. Descripción

Este driver intenta solucionar el problema común en las plataformas GNU/Linux de la inexistencia de drivers para el hardware.

Se trata de un driver para la tarjeta 8316 NuDAQ de ADLINK que proporciona al usuario una interfaz de tipo dispositivo de caracteres. Existen muchos modos de programación de la tarjeta para hacer la entrada/salida, y este driver se ha escrito para uno de ellos únicamente y no da la posibilidad de usar otro. Es cargable como módulo en los núcleos de la serie 2.4, esto es, que puede enlazarse de forma dinámica con el kernel.

El acceso a la tarjeta E/S se hace de forma transparente a través del tratamiento clásico en sistemas UNIX para los controladores mediante archivos en el directorio de dispositivos `/dev`.

El driver soporta las siguientes operaciones, teniendo el usuario acceso a ellas mediante las típicas funciones de manejo de archivos del sistema operativo:

fopen: abrir el dispositivo para leer o escribir

fread: leer datos del dispositivo

fwrite: escribir datos en el dispositivo

fclose: cerrar el dispositivo, no se podrá leer ni escribir

A/D

La conversión analógica digital se produce cuando el usuario pide un dato al driver con la función `fread`. En ese instante el driver pide la conversión al hardware y espera en un bucle a que la tarjeta responda poniendo a 1 un cierto bit (`AD_STATUS`). Por tanto la conversión ocurre por consulta software y bloquea el proceso. Es el programa del usuario entonces el que debe manejar la temporización de la adquisición de datos.

¿Por cuánto tiempo queda el proceso bloqueado? La documentación que acompaña a la tarjeta asegura que la conversión A/D de la tarjeta lleva en el peor caso $10\mu s$, pero como en el espacio del kernel no se pueden emplear llamadas a librerías estándar se tiene que esperar hasta que el hardware responda con la señal de “conversión A/D terminada”. No debería entonces por precaución usarse una frecuencia de muestreo mayor de 100 KHz, lo que tampoco es necesario en ningún caso.

Un punto importante es que el usuario debe leer del dispositivo 8 bytes en cada acceso proporcionando al driver un puntero a una variable de tipo `double`. El driver la llena con la información leída del conversor A/D y devuelve 1 si es que se realizó con éxito y 0 en otro caso.

D/A

El proceso de escritura en el dispositivo es atendido por el driver y resuelto en las escrituras adecuadas en los registros de la tarjeta. El mecanismo es inmediato y no bloquea el proceso.

El usuario debe escribir en el dispositivo los 8 bytes en formato `double` que corresponden a la tensión en voltios que se desea poner en la salida.

A.2.2. Puesta en funcionamiento

Para poner en funcionamiento el driver se deben tener privilegios de administrador en la máquina donde se encuentre instalada la tarjeta ADLINK. Para empezar deben desinstalarse aquellos drivers que ocupen el rango de direcciones de memoria que se necesitan para la tarjeta y que se encuentran en el rango de puertos a partir de 0x220. Se necesitan 16 bytes para la comunicación con la tarjeta. Si no se satisfacen estos requisitos el driver no se cargará. Por supuesto, si el driver se ha cargado ya será imposible cargarlo de nuevo hasta que la primera instancia no libere los recursos.

El comando usual para poner por pantalla los módulos cargados en el núcleo es

```
$ lsmod
```

Algunos de estos drivers ocupan direcciones de memoria en el rango de los puertos de entrada/salida. Para conocer los puertos que atienden cada uno de ellos se teclea esta orden en el terminal

```
$ cat /proc/ioports
```

Puede que un módulo cargado en el núcleo esté ocupando el rango de puertos que necesita el driver para comunicarse con la tarjeta. La solución a este problema pasa en primer lugar por cambiar el puerto al que atiende la tarjeta ADLINK, para lo que es necesario modificar la electrónica de la tarjeta colocando algunos jumpers en la placa. La segunda opción es desinstalar el módulo que ocupa el rango necesitado si este no es necesario durante la utilización del driver y de las aplicaciones que dependen de él. Para desinstalar un módulo llamado `parport`, por ejemplo, se teclea esta orden como superusuario en la consola

```
$ rmmmod parport
```

Una vez las direcciones de memoria estén libres podemos seguir adelante con la carga del driver.

También se necesita una entrada en el directorio de dispositivos `/dev` para que el usuario se pueda comunicar con la tarjeta, esto es, escribir o leer de ella. Este módulo no soporta el mantenimiento de las entradas en el directorio de dispositivos mediante el demonio del sistema `devfsd` así que puede ser necesario parar el demonio en caso de que éste se encontrara funcionando. Si se necesitara parar el demonio se pueden usar los scripts que se encuentran en `/etc/init.d`; se requieren permisos de superusuario para ello.

El driver busca el archivo de nombre `/dev/8316drv` en el directorio de dispositivos. De no existir, un usuario con permisos de administrador debe crear la entrada en el directorio de dispositivos mediante

```
$ mknod /dev/8316drv c 60 0
```

Es recomendable asignarle los permisos adecuados para que los usuarios normales del sistema puedan acceder al dispositivo. Pueden asignarse permisos de lectura y escritura universales de este modo

```
$ chmod 666 /dev/8316drv
```

Una vez hayamos conseguido liberar todos los recursos que necesita el driver, entonces podemos proceder a instalarlo mediante la siguiente orden (como administrador)

```
$ insmod 8316drv.o
```

siendo `8316drv.o` el código objeto creado en la compilación. Este módulo fue compilado y probado en un sistema operativo GNU/Linux con núcleo 2.4.18-6mdk, pero debe saberse que aunque se acompaña el código objeto compilado, este no tiene por qué funcionar en otra distribución con un kernel anterior a la rama 2.4; de hecho *se recomienda siempre recompilar el módulo contra las fuentes del kernel de la distribución sobre la que se quiere correr*. En caso de que las fuentes del kernel no estén disponibles o no se quiera o se tengan conocimientos para realizar la compilación, siempre puede intentarse *forzar la carga del módulo* del siguiente modo

```
$ insmod --force 8316drv.o
```

El núcleo mostrará mensajes de advertencia por forzar la carga de un módulo que no fue compilado para él.

En el caso de que hayamos sufrido un conflicto con otro controlador que ocupase el mismo rango de puertos E/S podremos advertir al módulo de que la tarjeta espera ahora en otra la dirección base para la comunicación. Esto se le hace saber al driver mediante un parámetro a la hora de enlazarlo con el núcleo,

```
$ insmod 8316drv.o base=0x220
```

La dirección base por defecto es `0x220` (en hexadecimal).

Si se desean saber detalles sobre el módulo, pueden visualizarse en la consola mediante el comando

```
$ modinfo 8316drv.o
```

El módulo debe haberse cargado correctamente, de otro modo lo más probable es que el kernel se queje en la salida estándar. El usuario querrá utilizar entonces el comando

```
$ dmesg
```

Para verificar que el driver se encuentra corriendo o para investigar los motivos por los que no se han conseguido todos los recursos. El módulo describe allí el proceso de petición al sistema de recursos y el éxito o fracaso de cada petición.

El dispositivo puede ser ya usado. En la distribución electrónica del proyecto se acompaña un ejemplo para verificar que el controlador funciona correctamente y que se puede compilar con

```
$ make ensayo
```

generando el ejecutable `ensayo`. El código fuente también está disponible.

Esta implementación del driver no admite concurrencia así que el módulo se quejará si se intenta abrir dos veces el dispositivo. Se recomienda programar las aplicaciones clientes con un *thread* que se encargue de la comunicación con la tarjeta y que ponga los datos en memoria común o algún mecanismo de comunicación adecuado.

Si el driver sufriera un fallo grave y dejara de funcionar es poco probable que los recursos se liberen, con lo que si se logra desinstalar el módulo no se podrá instalar de nuevo por encontrarse los recursos necesarios en uso. La única solución entonces es reiniciar la máquina, a no ser que se logren liberar los recursos. A este fin se acompaña también otro módulo llamado `salva` cuyo código fuente se proporciona. Se recomienda compilar este módulo con el *Makefile* de este modo

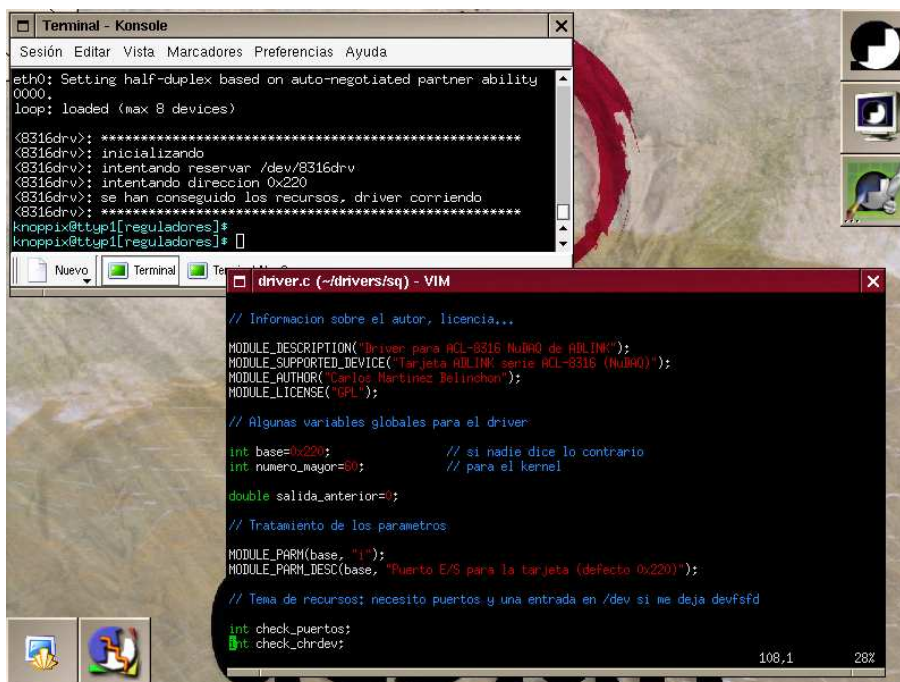
```
$ make salva
```

Esto creará el módulo `salva.o` para el núcleo (notar que son necesarias las fuentes del núcleo que usa la distribución). El módulo al cargarse de la manera antes explicada intenta liberar el dispositivo y los puertos que el driver usa por defecto.

Una vez usado puede descargarse el módulo de la siguiente manera

```
$ rmdir 8316drv
```

y poner de nuevo en funcionamiento `devfsd` en caso de haberlo parado.



```

Terminal - Konsole
Sesión Editar Vista Marcadores Preferencias Ayuda
eth0: Setting half-duplex based on auto-negotiated partner ability
0000.
loop: loaded (max 8 devices)
<8316drv>: *****
<8316drv>: inicializando
<8316drv>: intentando reservar /dev/8316drv
<8316drv>: intentando direccion 0x220
<8316drv>: se han conseguido los recursos, driver corriendo
<8316drv>: *****
knoppix@tty1[reguladores]*
knoppix@tty1[reguladores]*

driver.c (~/drivers/sq) - VIM
// Información sobre el autor, licencia...
MODULE_DESCRIPTION("Driver para ACL-8316 NuBAQ de ABL INH");
MODULE_SUPPORTED_DEVICE("Tarjeta ABL INH serie ACL-8316 (NuBAQ)");
MODULE_AUTHOR("Carlos Martínez Belincho");
MODULE_LICENSE("GPL");

// Algunas variables globales para el driver
int base=0x220; // si nadie dice lo contrario
int numero_mayor=0; // para el kernel

double salida_anterior=0;

// Tratamiento de los parametros
MODULE_PARM(base, "i");
MODULE_PARM_DESC(base, "Puerto E/S para la tarjeta (defecto 0x220)");

// Tema de recursos; necesito puertos y una entrada en /dev si me deja devfsd
int check_puertos;
int check_chrdev;

108.1 28%

```

Figura A.1: Captura de pantalla del driver

A.3. Driver con realimentación no lineal

Se desarrolló una segunda versión del controlador que implementa una realimentación mediante software para conseguir la no linealidad en el sistema, como se presentó en la sección 2.2.3.

La manera elegida para conseguir una no linealidad en el sistema mediante software fue alterar el esquema de funcionamiento del driver descrito en la sección A.2. En el controlador normal la lectura del dispositivo desencadena la petición a la tarjeta de la operación de conversión analógico a digital (A/D) para luego pasar el dato al sistema operativo. La operación de escritura lanza el proceso de conversión digital a analógica (D/A) tras adquirir la tarjeta el dato a través del puerto de E/S asignado.

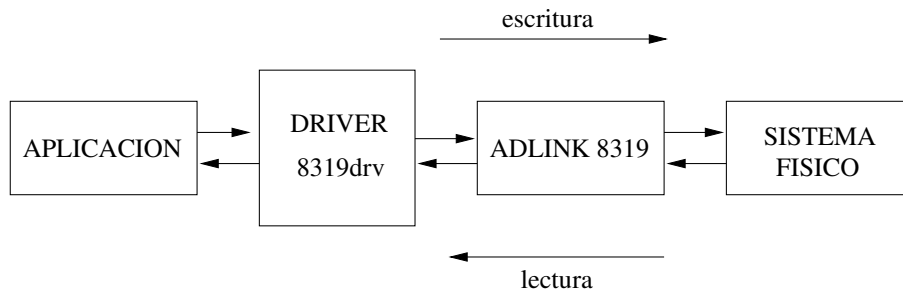


Figura A.2: Esquema del controlador 8319drv

En esta modificación del driver se cierra un lazo de realimentación dentro del driver con un bloque no lineal de tipo cuadrado.

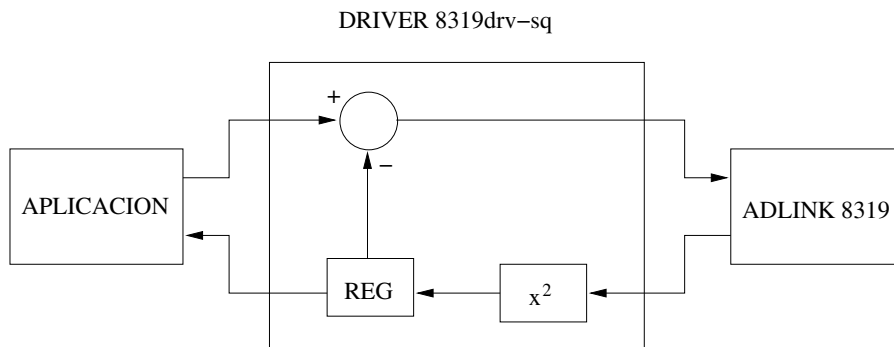


Figura A.3: Esquema del controlador 8319drv-sq

Un registro interno del driver se actualiza cada vez que el usuario realiza una lectura del dispositivo. Este valor se utiliza cuando el usuario hace la siguiente escritura para restarlo al cuadrado del valor dado por el usuario. El número resultante se le pasa al sistema físico de manera que, visto desde el lado de las aplicaciones el sistema parece ser completamente distinto. Esto es *completamente transparente para las aplicaciones*.

Se suministra el código fuente del controlador modificado en la distribución en soporte electrónico del proyecto así como el módulo compilado `8319drv-sq`. El driver utiliza los mismos recursos que el controlador estándar, por lo que no es posible utilizarlos simultáneamente.

A.4. Capturador

El fabricante de la tarjeta de adquisición de datos no proporciona software para capturar señales y dado que el software convencional que se suele emplear (Matlab, Daisylab) no soporta sistemas operativos GNU/Linux se consideró escribir una aplicación de captura de datos como medio para adquirir señales y dar escalones de tensión a las maquetas.

Como esta aplicación que presento en esta sección es de uso general decidí en su momento adecentar el código y preparar una interfaz gráfica para facilitar su uso a otras personas que trabajen en otros proyectos pero que tengan las mismas necesidades.

La aplicación “capturador” está escrita en *C++* [9] y hace uso de las librerías *Qt* de Trolltech [3] para implementar la interfaz de usuario. Las librerías *Qt* son multiplataforma por lo que el trabajo realizado sobre la interfaz es portable totalmente, al igual que el código en *C++* que realiza las funciones de adquisición y volcado a disco de los datos. No es posible sin embargo hacer portable el mecanismo de comunicación con el driver de la tarjeta de adquisición de datos ya que este es totalmente dependiente del sistema operativo.

El programa “capturador” consta de una interfaz de usuario formada por dos ventanas redimensionables. La primera de ellas contiene los controles necesarios para pasar la tensión en voltios seleccionada mediante la barra deslizante de la parte izquierda a la tarjeta de adquisición, un botón para salvar los datos y otro para salir del programa. Una casilla permite al usuario indicar que los datos deben registrarse para luego ser volcados a un fichero de texto en disco duro y finalmente otro botón para salir del programa. La segunda ventana visualiza en azul la evolución de la tensión que recoge la tarjeta de adquisición y en verde el valor indicado por el usuario mediante la barra de deslizamiento.

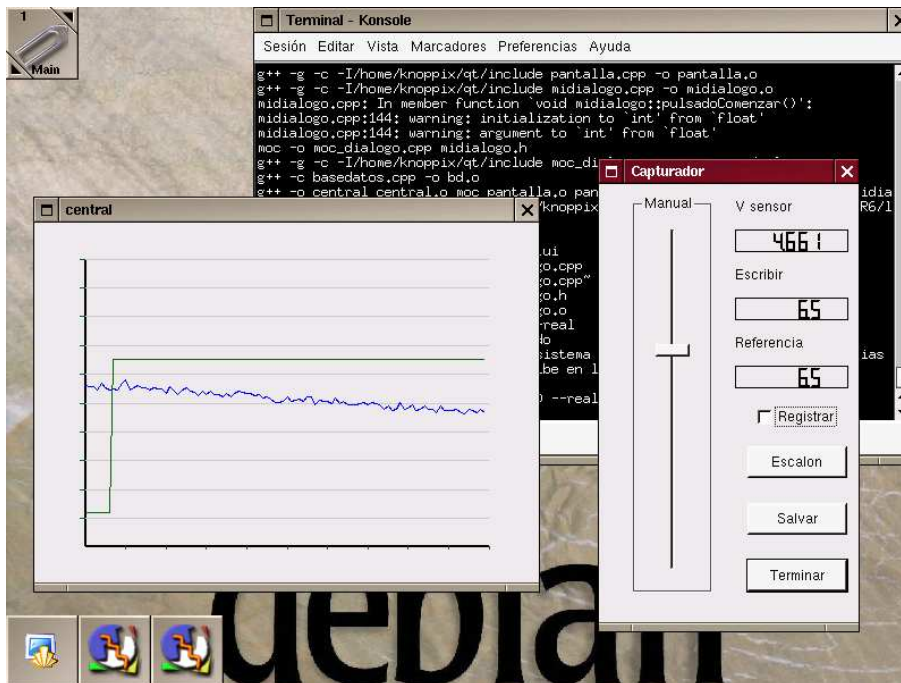


Figura A.4: Captura de pantalla del capturador de señales

A.5. Scripts en Python para *Blender 3D*

Para presentar las vistas en tres dimensiones de las superficies (sección 3.3) se ha intentado hacer uso de varias aplicaciones libres que ofrecen la posibilidad de representar superficies y generar imágenes desde distintos puntos de vista.

gnuplot: genera gráficos postscript, pero no es posible dibujar a la vez superficies con distinto dominio en el plano xy .

octave: se basa en gnuplot, con lo que no hay posibilidad de encontrar solución al problema anterior.

metapost: genera gráficos postscript, pero no es capaz internamente de manejar espacios tridimensionales por estar diseñado para generar gráficos planos.

De manera que al no encontrar un programa que manejara superficies dadas de forma simbólica y a la vez facilitase la obtención de imágenes desde puntos de vista concretos, decidí utilizar una aplicación libre multiplataforma, muy potente y fácilmente extensible mediante scripts en el lenguaje de programación Python: *Blender 3D*.¹

Al no existir ninguna funcionalidad en *Blender 3D* para generar superficies a partir de expresiones simbólicas de funciones del tipo $z = f(x, y)$ decidí extender la aplicación con un script creado *from scratch* y que se adjunta en el cdrom que acompaña a la memoria.

Dado que el desarrollo del script fue costoso en tiempo y esfuerzo, se ha documentado ligeramente su uso y se ha puesto a disposición de los demás usuarios de *Blender 3D* en la página web

www.aslab.org/~carlosm/web_blender/web_blender.html

esperando que las demás personas de la comunidad de usuarios de blender lo usen y modifiquen a su antojo para ajustarlo a sus necesidades.

¹Puede obtenerse más información sobre Blender en la página web www.blender.org

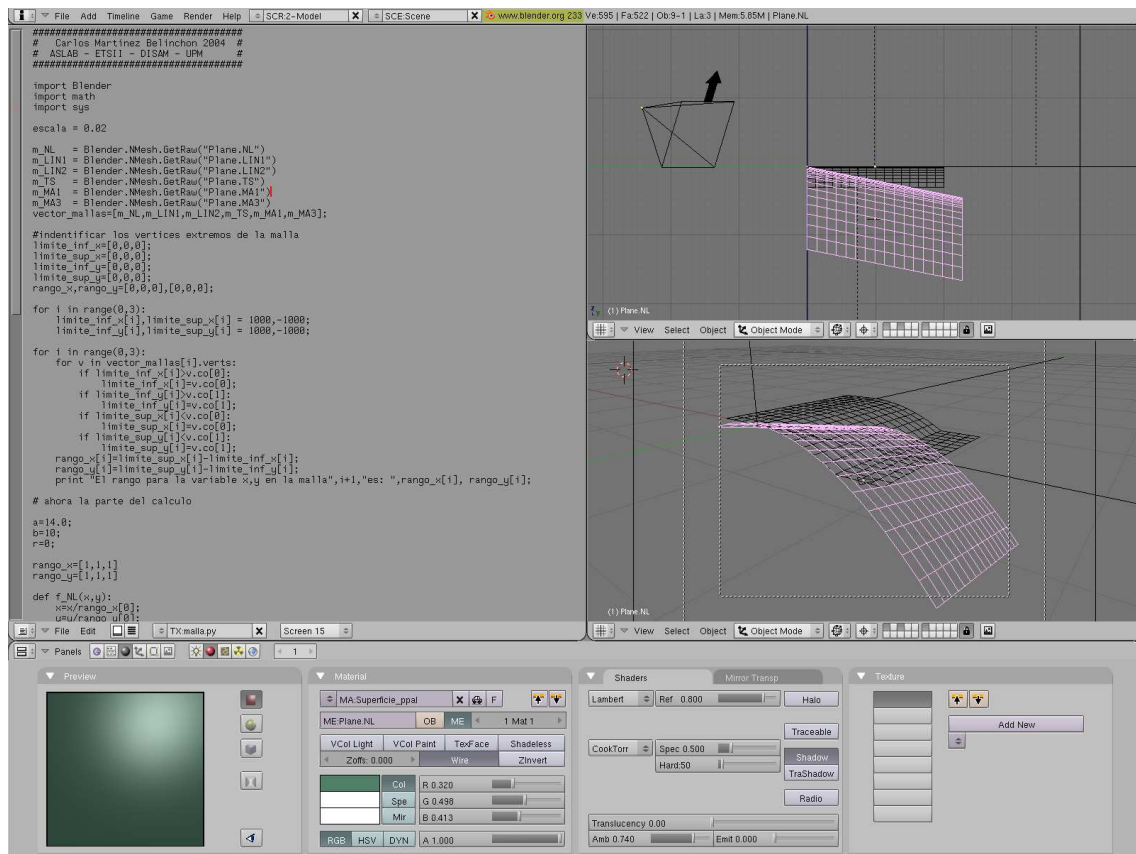


Figura A.5: Captura de pantalla de blender

A.6. Licencia

El desarrollo de todo este software se ha realizado usando software libre y eso me anima a liberar todos mis trabajos bajo licencia libre GPL. Una copia de la misma se acompaña en la distribución de la memoria en soporte electrónico.

Puede tener acceso al texto de la licencia en la dirección de internet:

<http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html>

y su traducción no oficial al castellano aquí:

<http://www.garaitia.com/new/gpl-spanish.php>

Apéndice B

Justificación del Método de Derivación

Este apéndice presenta una justificación del método robusto de derivación numérica en que se basaron algunos razonamientos en la sección 2.1.4.

Se trata de mostrar en pasos sucesivos que la metodología aquí presentada reduce la derivación de una función al cálculo de una convolución y comentar las ventajas de utilizar este procedimiento cuando las medidas de la función están contaminadas con ruido blanco. Dos implementaciones de este método numérico se proporciona en el cdrom que acompaña a la memoria en lenguajes C++ y *octave*.

- **Propiedad 1** Sea h la convolución de las dos funciones f y g , definida por

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (\text{B.1})$$

Se tiene que si g es derivable entonces también la función h es derivable y además $h' = f * g'$.

Para probar lo anterior escribo la definición de la derivada de $h(t)$,

$$h'(t) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{h(t+u) - h(t)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [g(t+u-\tau) - g(t-\tau)] d\tau \quad (\text{B.2})$$

Intercambio los límites impunemente

$$h'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(t+u-\tau) - g(t-\tau)}{u} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \quad (\text{B.3})$$

- **Propiedad 2** Considérese la sucesión de funciones

$$\delta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}nt^2\right) \quad (\text{B.4})$$

definidas para $n = 1, 2, 3, \dots$. Comprobar que para una función continua f se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta_n(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (\text{B.5})$$

justificando así que se escriba $f * \delta = f$.

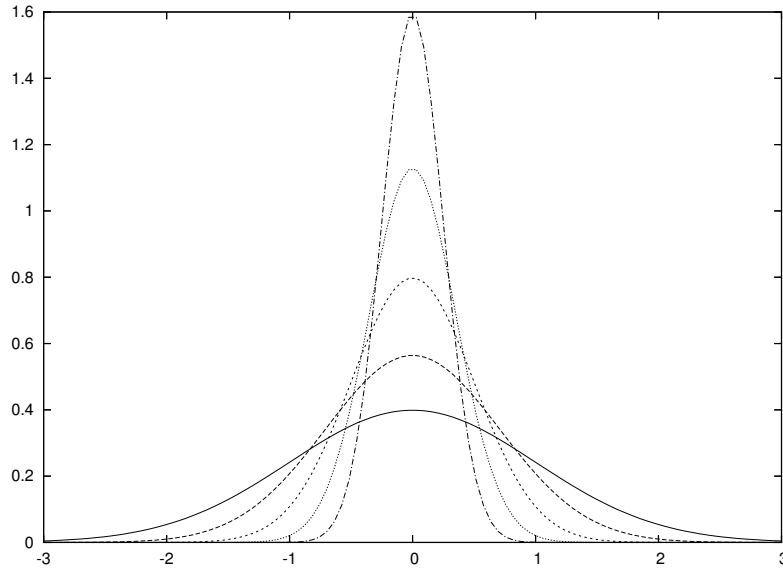


Figura B.1: Sucesión de funciones $\delta_n(t)$

Para demostrar esta propiedad empleo otra sucesión de funciones que convergen a δ (ver figura B.1)

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ n & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0 & t > 1/n \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

La expresión anterior hace

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \delta_n(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{1/n} f(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.7})$$

El Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral nos dice que para f continua sobre $[a, b]$ existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c) \quad (\text{B.8})$$

De este modo, si $0 \leq \varphi_n \leq \tau \leq 1/n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{1/n} f(t - \tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} n [1/n f(t - \varphi_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t - \varphi_n) \quad (\text{B.9})$$

Se demuestra por la regla del sandwich que la sucesión φ_n converge a 0,

$$0 \leq \varphi_n \leq 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0 \xrightarrow{} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0 \quad (\text{B.10})$$

Y como queríamos demostrar,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta_n(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (\text{B.11})$$

- **Propiedad 3** En el caso de que f sea derivable, validar heurísticamente la fórmula

$$f'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta'_n(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.12})$$

Para ello tomo la sucesión de funciones

$$g_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta_n(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.13})$$

Tomando ahora límites cuando $n \rightarrow \infty$, el resultado (2) dice que la sucesión de funciones converge precisamente a $f(t)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta_n(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (\text{B.14})$$

Como se sabe que $f(t)$ es derivable entonces, derivando en ambos términos e intercambiando los límites libremente,

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta'_n(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \delta'_n(t - \tau) \right] d\tau = f * \delta' \quad (\text{B.15})$$

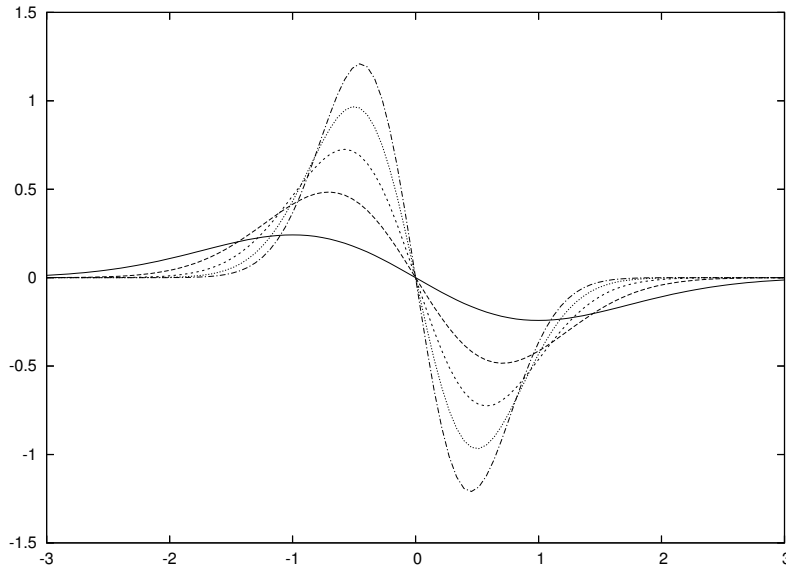
Esto es, que se puede estimar el valor de $f'(t)$ calculando $f * \delta'$

- **Propiedad 4** Discretizar la integral de convolución para un determinado valor de n , deducir una manera de aproximar numéricamente el valor de $f'(0)$ en términos de una sucesión de valores obtenidos muestreando la función f . Analícense las ventajas de este procedimiento cuando las medidas de f estén contaminadas con un ruido blanco.

Para que esta expresión resulte aplicable a problemas numéricos se tendrá que truncar cada uno de los límites que forman parte de la expresión y habrá que tener en cuenta que disponemos únicamente de muestras de f periódicas.

Si se parte de la expresión B.12, puede observarse que dado que la sucesión de funciones δ_n son muy apuntadas y caen muy rápido hacia cero, puede aproximarse muy certeramente el valor de la integral impropia por el valor de una integral sobre un intervalo cerrado que contenga a las alas de las funciones δ'_n . Al truncar el límite en n y quedarnos con un valor finito N , elegiremos $\Omega = bT$, siendo b natural y T el periodo con el que se toman las muestras, de manera que

$$f'(t) \approx \int_{-\Omega}^{\Omega} f(\tau) \delta'_N(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.16})$$

Figura B.2: Sucesión de funciones $\delta'_n(t)$

tal que para $|t - \tau| > \Omega$ sea $|f(\tau)| < \varepsilon$.

$$f'(t) \approx \int_{t-\Omega}^{t+\Omega} f(\tau) \delta'_N(t - \tau) d\tau = \int_{-\Omega}^{\Omega} f(t - \tau) \delta'_N(\tau) d\tau \quad (\text{B.17})$$

Como se dispone de muestras de f con periodicidad T se realiza la aproximación a la integral anterior por rectángulos utilizando los $2b + 1$ valores de f entre $-b$ y b ,

$$f'_j = f'(jT) \approx \sum_{k=-b}^b f(jT + kT) \delta'_N(jT) \quad j = -b, \dots, b \quad (\text{B.18})$$

Si se denomina $\delta_i = \delta(iT)$ y $f_k = f(kT)$ entonces

$$f'_j \approx \sum_{k=-b}^b f_{j-k} \delta_k^{iN} \quad j = -b, \dots, b \quad (\text{B.19})$$

La expresión anterior es una convolución discreta truncada, de términos finitos.

Si aplicamos el resultado último a una señal $\hat{f}(t)$ con dos componentes $\hat{f}(t) = f(t) + r(t)$ donde $r(t)$ es una señal de ruido blanco aditivo entonces puede deducirse lo siguiente:

$$\hat{f}'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tau) \delta'(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\tau) + r(\tau)] \delta'(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.20})$$

Puede partirse en dos integrales

$$\hat{f}'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta'(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \delta'(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.21})$$

El primer término es $f'(t)$ y el segundo se prueba ser 0, lo que significa que este método de derivación es *robusto ante ruido blanco aditivo*.

Bibliografía

- [1] Adlink. *Manual de usuario de la tarjeta ACL-8316 NuDAQ de ADLINK*, 1996.
- [2] Basil Mohammed Al-Hadithi. *Análisis de estabilidad global y diseño de sistemas de control borroso*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 2002.
- [3] Matthias Kalle Dalheimer. *Qt*. O'Reilly, 2002.
- [4] Fernando Matía Espada. *Análisis y diseño de sistemas de control de procesos basados en lógica borrosa*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 1994.
- [5] Bill O. Gallmeister. *POSIX 4: Programming for the real world*. O'Reilly & Associates, Inc, 1995.
- [6] Jessica Perry Hekman. *Linux in a Nutshell: a Desktop Quick Reference*. O'Reilly & Associates, Inc, 1997.
- [7] Hill Horowitz. *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, 1989.
- [8] Raúl Reyero. *Sistemas de control basados en lógica borrosa: fuzzy control*. Centro de Investigaciones Tecnológicas IKERLAN, Omron Electronics S.A., 1998.
- [9] Bjarne Stroustrup. *The C++ Programming Language*. Addison-Wesley, 1997.
- [10] Agustín Jiménez Avello y Fernando Matía Espada. Control fuzzy: Estado actual y aplicaciones. *Cuadernos profesionales AADECA*, Septiembre 1995.
- [11] Jesús Carretero y Pedro de Miguel Anasagasti. *Sistemas operativos, una visión aplicada*. McGraw-Hill/ Interamericana de España S.A., 2001.
- [12] Hans Bandemer y Siegfried Gottwald. *Fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy methods*. John Wiley & Sons, 1995.
- [13] M. Beck y U. Kunitz. *Linux Kernel Programming*. Addison-Wesley, 2002.